ЧАСТЬ ВТОРАЯ. МЫСЛИ

Глава 1

ПРОСТРАНСТВА И ГРУППЫ

Пространства

В математике пространствами называются множества элементов, обычно именуемых точками, в которых выделены те или иные подмножества. В аффинных и проективных пространствах выделенные подмножества называются прямыми линиями, плоскостями и гиперплоскостями, в конформных и псевдоконформных пространствах – окружностями, сферами и гиперсферами, в топологических пространствах – замкнутыми множествами, а их дополнения – открытыми множествами. Выделенные подмножества удовлетворяют определенным условиям или аксиомам.

Если в множестве точек всяким двум точкам поставлено в соответствие число, удовлетворяющее определенным условиям, и называемое расстоянием между двумя точками,множество называетсз метрическим пространством. Два метрических пространства, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее расстояние, называются изометричными.

Точки пространств обычно определяются несколькими числами или элементами более сложных систем, называемых алгебрами. Эти числа или элементы называются координатами точек. Число независимых координат точек пространства называется размерностью пространства. Пространство размерости n называется n-мерным.. В аффинных и проективных пространствах можно ввести метрику с помощью квадратичных или эрмитовых форм от координат точек; полученные пространства называютая квадратичными и эрмитовыми евклидовыми, псевдоевклидовыми, неевклидовыми и симплектическими пространствами.

Аффинные, проективные, конформные и псевдоконформные пространства называются инцидентностными. Евклидовы, псевдоевклидовы и неевклидовы пространства являются метрическими.

Представление о пространстве как о множестве точек сложилось только в XIX-XX веках. В древности считалось, что линии, поверхности и пространство не состоят из точек, а только являются “геометрическими местами”, в которых находятся точки.

Аксиомы топологического пространства очень просты: 1) все пространство – замкнутое множество, 2) “пустое множество”, т.е. множество, не содержащее ни одной точки, также считается замкнутым, 3) объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто, 4) пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.

В случае, когда замкнутым считается любое множество точек, пространство называется дискретным, в случае, когда замкнутыми множестами считаются только все пространстно и пустое множество, пространство называется тривиальным.

В случае, если в топологическом пространстве задана такая система открытых множеств, что любое открытое множество является объединением множеств этой системы, то множества этой системы называются окрестностями. Окрестность, содержащая точку А, называется окрестностью точки А.

Наиболее важными топологическими пространствами являются хаусдорфовы пространства, в которых выполнены еще две аксиомы:
5) точки замкнуты, 6) для всяких двух точек существуют непересекающиеся окрестности этих точек.

Два топологические пространства, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, причем замкнутые множества одного пространства соответствуют замкнутым множествам другого, называются гомеоморфными пространствами.

Однозначное преобразование одного топологического пространства в другое, переводящее замкнутые множества в замкнутые, называется непрерывным преобразованием.

Группы

Группой называется такое множество элементов любой природы, в котором всяким двум элементам А и В поставлен в соответствие третий элемент С=АВ, причем:
1) для всяких трех элементов А, В, С выполняется ассоциативный закон (АВ)С=А(ВС),
2) существует такой элемент I, что для каждого элемента А IА=АI=А,
3) для каждого элемента А существует элемент А', для которого АА'=А'А=I.
Элемент АВ называется произведением элементов А и В, элемент I называется единицей группы, элемент А' называется обратным элементом для элемента А.
В случае, когда группа коммутативна, т.е. для всяких двух элементов А и В выполняется равенство АВ=ВА, групповая операция обычно называется сложением и обозначается С=А+В, роль единицы играет 0, а роль элемента обратного для А играет противоположный элемент –А.
Если в множестве определены две операции – сложение и умножение, связанные дистрибутивным законом А(В+С)=АВ+АС, (А+В)С=АС+ВС, причем все множество со сложением и все множество без 0 с умножением являются коммутативными группами,то такое множество называется полем. Вещественные числа образуют поле R, комплексные числа образуют поле C
Если в определении поля отказаться от коммутативности умножения, мы получим тело или косое поле. Примером тела является тело Н кватернионов a+bi+cj+dk, где $i^2=j^2=-1$, ij = –ji =k. Если в определении поля или тела

отказаться от требования, чтобы множество без нуля являлось группой, мы получим кольцо. Два не нулевых элемента кольца,произведение которых равно 0, называются делителями нуля.

Две группы, два поля или два кольца, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее их операции, называются изоморфными. Если между двумя гпуппами G и H установлено однозначное, но не взаимно однозначное соответствие, сохраняющее групповую операцию, группы называются гомоморфными. В этом случае элементы первой группы, соответствующие единице второй, образуют подгруппу N, называемую инвариантной подгруппой или нормальным делителем. Группа H называется фактор-группой группы G по ее подгруппе N и обозначается G/N Группа, в которой нет инвариантных подгрупп, называется простой группой. Аналогично определяется гомоморфизм колец, в этом случае роль инвариантных подгрупп играют идеалы колец. Изоморфные отображения групп, полей и колец на себя называются автоморфизмами.

Группы в которых имеются цепочки вложенных друг в друга инвариантных подгрупп, причем все фактор-группы каждой инвариантной подгруппы по следующей коммутативны, называются разрешимыми группами.

Линейные пространства и алгебры

Коммутативная группа, в которой определено умножение на вещественные числа, причем имеют место дистрибутивный закон умножения относительно сложения и ассоциативный закон умножения, называется линейным или векторным пространством. Элементы этого пространства называются векторами, а вещественные числа - скалярами. Размерность этого пространства равна числу линейно независимых векторов. Принимая эти векторы за базисные, мы можем представить любой вектор в виде линейной комбинации базисных векторов. Коэффициенты такого разложения являются координатами векторов в данном базисе.

Скалярная линейная функция от элементов линейного пространства записывается в виде j =ux, где x - вектор данного пространства, u - ковектор , т.е. вектор пространства, сопряженного с данным, выражение ux называется сверткой ковектора u и вектора x.

Скалярная полилинейная функция Ф p векторов и q ковекторов определяет тензор p-й ковалентности q-й валентности, коэффициенты функции Ф называются координатами тензора.

Функция Ф при p=2, q=0 называется билинейной формой.

Автоморфизмами линейного пространства являются его линейные преобразования x'=Ax, где A - линейный оператор.

Линейные операторы определяют тензоры, для которых p=q=1.

Кольцо, являющееся линейным пространством при условии коммутативности умножения в кольце и умножения на скаляры в линейном пространстве, называется алгеброй или системой гиперкомплексных чисел.

Прямой суммой A+B двух алгебр A и B размерностей m и n называется алгебра размерности m+n, базис которой состоит из базисов алгебр A и B, причем все произведения базисных элементов разных прямых слагаемых равны 0.

Тензорным произведением AB тех же двух алгебр A и B называется алгебра размерности mn, базисные элементы которой – произведения базисных элементов алгебр A и B, причем базисные элементы тензорных сомножителей коммутируют между собой.

Примерами алгебр являются

алгебра C' двойных чисел $a+be$, $e^2=+1$, изоморфная прямой сумме R+R двух полей R,

алгебра M(n) вещественных матриц n-го порядка,

алгебра H' псевдокватернионов $a+bi+ce+df$, $i^2=-1$, $e^2=+1$, $ie=-ei=f$, изоморфная алгебре M(2),

алгебры CM(n) и HM(n) комплексных и кватернионных матриц n-го порядка, являющиеся тензорными произведениями алгебры M(n) на, соответственно, алгебру C или H,

алгебра C_0 дуальных чисел $a+be$, $e_2=0$,

алгебра H_0 полукватернионов $a+bi+ce+dh$, $i^2=-1$, $e^2=0$, $ie=-ei=h$.

Алгебра A(n) альтернионов или чисел Клиффорда порядка n имеет размерность 2n-1 , ее базис состоит из 1, $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ для которых $i_k^2=-1$, и произведений различных одноиндексных элементов, причем $i_h i_k=-i_k i_h$. Алгебры A(n) при n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 изоморфны, соответственно, полям R и C, телу H и алгебрам H+H, HM(2), CM(4), M(8) и M(8)+M(8).

Заменяя в определении алгебры A(n) k элементов i_h элементами e_h для которых $e_h^2=+1$, мы получим алгебру A(n-k, k) псевдоальтернионов порядка n и индекса k. Алгебры A(1,1) и A(2,1) изоморфны, соответственно, алгебрам C' и H'.

Заменяя в определении линейного пространства поле R скаляров полем C или телом H мы получим комплексное или кватернионное линейное пространство.

Заменяя в определении линейного пространства поле скаляров алгеброй с делителями нуля, мы получим модуль. В модулях имеются особенные векторы, которые не равны 0, но их произведения на делитель нуля, могут быть равны 0.

Пространства над алгебрами

Аффинное пространство над алгеброй можно определить как множество элементов, называемых точками, ассоциированное с линейным пространством или модулем, причем всяким двум точкам A и B соответствует вектор a=AB, всякой точке A и вектору a соответствует такая точка B, что a=AB, и для всяких трех точек A, B и C сумма векторов AB и BC равна вектору AC.

Прямой линией аффинного пространства над алгеброй называется такое множество точек, что для любых двух точек A и B этого множества вектор AB коллинеарен с некоторым вектором линейного пространства или с неособенным вектором модуля ; m-мерной плоскостью называется такое множество точек, что для любых двух точек A и B этого множества вектор AB является линейной комбинацией m линейно независимых векторов линейного пространства или модуля.

Аффинные преобразования аффинного пространства имеют вид $x' = Af(x) + b$, где A и b – линейный оператор и вектор линейного пространства или модуля, а $f(x)$ – автоморфизм алгебры.

Две прямые линии или m-мерные плоскости называются параллельными, если они определяются одними и теми же линейно независимыми векторами линейного пространства или модуля. Одну из двух параллельных линий или плоскостей можно перевести в другую параллельным переносом $x' = x + a$.

В афинных пространствах над алгебрами с делителями нуля имеются смежные точки и смежные и расходящиеся прямые линии. Две точки A и B называются смежными, если вектор AB особенный. Две прямые линии называются смежными, если они содержат смежные точки. Две прямые линии называются расходящимися, если они не имеют общих точек, но могут быть переведены параллельным переносом в смежные прямые линии.

Проективное пространство над алгеброй является результатом дополнения аффинного пространства бесконечно удаленными и идеальными точками, причем каждая система параллельных линий имеет одну общую бесконечно удаленную точку, а идеальные точки, которые имеются только в случае алгебр с делителями нуля, определяются смежными прямыми. Точки n-мерного проективного пространства представляются векторами (n+1)-мерного аффинного пространства с точностью до правых скалярних множителей. Прямые линии и m- мерные плоскости проективного прострaства представляются 2-мерными и (m+1) -мерными подпространствами линейного пространства или подмодулями модуля.

Так как бесконечно удаленные точки, которыми дополнено аффинное пространство, представляются векторами m-мерного линейного подпространства или подмодуля, эти бесконечно удаленные точки образуют бесконечно удаленную гиперплоскость проективного пространства. Идеальные точки представляются векторами, определяющими прямые смежные с прямыми, которые определяются векторами, представляющими бесконечно удаленные точки.

Проективные преобразования имеют вид $x' = Af(x)$, где A – линейный оператор (n+1)-мерного линейного пространства или модуля, а $f(x)$ – автоморфизм алгебры.

Гиперплоскости, т.е. (n-1)-мерные плоскости аффинных и проективных пространств, определяются соответственными уравнениями $ux + v = 0$ и $ux = 0$, где u – ковектор линейного пространства или модуля, т.е. вектор пространства или модуля, сопряженного с рассматриваемым. В случае проективного пространства ковектор u определен с точностью до левых скалярных множителей, на этом основан принцип двойственности проективного пространства.

Если в аффинном пространстве над коммутативной алгеброй определено скалярное произведение векторов (a,b)=(b,a), т.е. скалярный квадрат (a,a) является квадратичной формой, мы получаем квадратичное евклидово или псевдоевклидово пространство.

Если в алгебре имеется инволюция, т.е.такой переход от всякого элемента x к элементу x* , что (x*)* =x и (xy)* =y*x* , и в аффинном пространстве над этой алгеброй определено скалярное произведение (a,b) = (b,a)* , т.е. скалярный квадрат является эрмитовой формой, мы получаем эрмитовы евклидовы и псевдоевклидовы пространства.

Если такие же скалярные произведения векторов определены в проективном пространстве над коммутативной алгеброй или над алгеброй с инволюцией, мы получаем квадратичные и эрмитовы неевклидовы пространства, т.е. эллиптические, гиперболические, псевдоэллиптические и псевдогиперболические пространства.

Если скалярное произведение таково, что (a,b)= –(b,a) или (a,b)=–(b,a)*, то мы получаем квадратичное или эрмитово симплектическое пространство.

Геометрия пространств с делителями нуля в значительной степени разработана в моих книгах 1955 и 1997 гг., а также в работах моих учеников.

Вещественные пространства и многообразия

В случае вещественного евклидова пространства скалярный квадрат (a,a) является положительно определенной квадратичной формой, а в случае вещественного псевдоевклидова пространства (a,a) - знаконеопределенная квадратичная форма, и если индекс этой формы равен k, псевдоевклидово пространство называется пространством индекса k. Пространство-время специальной теории относительности является 4-мерным псевдоевклидовым пространством индекса 1.

Расстоянием между точками A и B называется квадратвый корень из склярного квадрата (a,a) вектора a = AB. Преобразования этих пространств, сохраняющие расстояния между их точками, называются движениями. Движения этих пространств являются частными случаями их аффинных преобразований.

Вещественное эллиптическое пространство (неевклидово пространство Римана) размерности n можно определить как гиперсферу $(x,x)=r^2$ с отождествленными диаметрально противоположными точками в (n+1)-мерном евкидовом пространстве. Роль прямых линий и m-мерных плоскостей эллиптического пространства играют большие круги и большие m-мерные сферы гиперсферы. Движения эллиптического пространства определяются вращениями гиперсферы.

Гиперболическое пространство (неевклидово пространство Лобачевского) можно определить как гиперсферу мнимого радиуса (x,x)= – q^2 в (n+1)-мерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1. Прямые линии и m-мерные плоскости гиперболического простраства определяются сечениями гиперсферы мнимого радиуса ее диаметральными 2-мерными и (m+1)-мерными плоскостями Движения гиперболического пространства определяются вращениями гиперсферы мнимого радиуса. Гиперсфера мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве индекса 1 имеет вид двуполостного гиперболоида и состоит из двух полостей. Лобачевский определял открытое им пространство не с помощью псевдоевклидова пространства, которое в его время было неизвестно, а как пространство, получаемое из евклидова при отказе от V постулата Евклида (аксиомы параллельности). Лобачевский заметил, что формулы тригонометрии в его пространстве могут быть получены из формул обычной сферической тригонометрии, если считать радиус сферы чисто мнимым числом.

Так как точки гиперсферы мнимого радиуса в пространстве-времени специальной теории относительности изображают скорости движущихся материальных точек, закон сложения скоростей в специальной теории относительности эквивалентен одной из тригонометрических формул пространства Лобачевского.

О многомерных евклидовом и неевклидовых пространствах мечтал поэт Валерий Брюсов, который в стихотворении “Мир N измерений” писал:

Ширь, глубь, высь – лишь три координаты.
Дальше хода нет. Засов закрыт.
С Пифагором слушай сфер сонаты,
Атомам дли счет, как Демокрит.
Путь по числам – приведет нас в Рим он,
Все пути ума ведут туда.
То же в новом – Лобачевский, Риман.
Та же в зубы узкая узда.
Но живут, живут в N измереньях
Люди воль, циклопы мысли, те,
Кому жалки мы с ничтожным зреньем.
С нашим шагом по одной черте.

Лобачевский действительно рассматривал только трехмерное гиперболическое пространство, но Эудженио Бельтрами еще в 1868 г. рассмотрел n-мерное гиперболическое пространстно, а Риман в своей знаменитой лекции “О гипотезах, лежащих в основании геометрии” рассматривал n-мерные пространства переменной кривизны, называемые теперь римановыми пространствами, и n-мерные пространства постоянной кривизны, к которым относится эллиптическое пространство как их частный случай.

Заменяя в определении n-мерных эллиптического и гиперболического пространств (n +1)-мерные евклидово пространство и псевдоевклидово пространство индекса 1 псевдоевклидовыми пространствами индексов k и k+1, мы получим псевдоэллиптическое и псевдогиперболическое пространства индекса k. Прямые линии, m-мерные плоскости и движения в этих пространствах определяются так же как в гиперболическом пространстве.

Если рассмотреть проективное пространство, точки которого представляются векторами, направленными по радиусам гиперсфер, мы получим проективные модели неевклидовых пространств. В этих моделях эллиптическое пространство изображается полным проективным пространством, а остальные неевклидовы пространства изображаются областями проективного пространства, ограниченными гиперквадриками (x,x)=0, называемыми абсолютами неевклидовых пространств. Абсолют имеется и в эллиптическом пространстве, но в этом случае он является мнимой гиперквадрикой.

Расстояние между двумя точками A и B неевклидова пространства в проективной модели может быть выражено через двойное отношение этих точек и двух точек пересечения прямой AB с абсолютом. Прямые линии и m-мерные плоскости неевклидовых пространств в проективных моделях совпадают с прямыми и плоскостями проективного пространства, движения неевклидовых пространств в этих моделях совпадают с проективными преобразованиями, переводящими в себя абсолюты.

Конформным пространством размерности n называется n-мерное евклидово пространство, дополненное одной бесконечно удаленной точкой, причем прямые линии и m-мерные плоскости считаются окружностями и m-мерными сферами, проходящими через бесконечно удаленную точку. Псевдоконформным пространством размерности n и индекса k называется псевдоевклидово пространство той же размерности и того же индекса, дополненное одной бесконечно удаленной точкой и идеальными точками, причем прямые линии и m-мерные плоскости считаются окружностями и m-мерными сферами, проходящими через бесконечно удаленную точку, а идеальные точки рассматриваются как точки гиперсферы нулевого радиуса с центром в бесконечно удаленной точке.

Преобразования конформного и псевдоконформных пространств, сохраняющие углы между кривыми линиями, называются конформными преобразованиями. Конформные преобразования n-мерных конформного и псевдоконформных пространст, при n >2 переводят окружности этих пространств в окружности. При n=2 преобразования конформной и псевдоконформной плоскостей,переводящие окружности этих плоскостей в окружности, называются круговыми преобразованиями и являются частными случаями конформных преобразований.

Проектируя гиперсферу мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве индекса 1 из ее центра на касательную гиперплоскость к ней, мы получим модель гиперболического пространства в шаре евклидива пространства, в которой прямые линии гиперболического пространства изображаются диаметрами и хордами шара, а параллели Лобачевского-хордами, имеющими один общий конец. Эта модель по существу совпадает с проективной моделью.

Проектируя ту же гиперсферу из одной ее точки на касательную гиперплоскость в диаметрально противоположной точке, мы получим другую модель гиперболического пространства в шаре евклидова пространства. В этой модели прямые линии гиперболического пространства изображаются диаметрами шара и дугами окружностей ортогональных к гиперсфере, ограничивающей шар. В этой проекции углы между линиями изображаются в натуральную величину. Эта модель является конформной моделью, а определяющая ее проекция - аналог стериографической проекции.

Применяя аналогичные проекции к гиперсферам, определяющим другие неевклидовы пространства, мы получим конформные модели этих пространств. Эти модели можно рассматривать как модели конформного и псевдоконформных пространств.

Симплектическим пространством размерности 2n-1 называется проективное пространство той же размерности, в котором задана кососимметрическая билинейная форма (a,b) = - (b,a). Прямые линии AB, определяемые точками A и B, представляемыми векторами a и b, для которых (a,b) = 0, называются нуль -прямыми, они образуют линейный комплекс прямых. Проективные преобразования, переводящие в себя этот линейный комплекс, называются симплектическими преобразованиями.

Первоначально эти преобразования назывались преобразованиями линейного комплекса, а группа этих преобразований называлась комплекс-группой (Komplex-Gruppe). Когда Герман Вейль переехал из Германии в США и стал называть комлекс - группу complex group, он увидел, что это неудобно, так как эти же слова означают “комплексная группа”. Поэтому он предложил называть эту группу симплектической, переведя латинское слово complexus - “сложный” греческим словом symplektikos. Преобразования и пространство также стали называть симплектическими.

Симплектическим пространством размерности 2n называется аффинное пространство той же размерности, в котором определено кососимметрическое скалярное произведение векторов (a,b) = -(b,a).

Топологическое пространство, каждая точка которого обладает окрестностью гомеоморфной n-мерному евклидову пространству, называется n-мерным многообразием. В каждой такой окрестности можно ввести координаты, определяемые координатами в евклидовом пространстве.

В том случае, когда в каждом пересечении таких окрестностей переход от одной системы координат к другой задается дифференцируемыми или аналитическими функциями, многообразие называется, соответственно, дифференцируемым или аналитическим.

В каждой точке дифференцируемого многообразия можно определить касательное линейное пространство. Координаты векторов этого пространства являются дифференциалами координат точек многообразия.

Если в касательном пространстве каждой точки n-мерного дифференцируемого многообразия определено скалярное произведение n-мерного евклидова пространства или n-мерного пседоевклидова пространства индекса k, мы получим, соответственно, n-мерное риманово пространство или псевдориманово пространство индекса k. В римановых и псевдоримановых пространствах можно определить длину линии, угол между пересекающимися линиями, геодезические (кратчайшие) линии и площадь участка двумерной поверхности.

Если из точки A риманова пространства выходят геодезические линии AB и AC, и углы геодезического треугольника ABC при его вершинах обозначены теми же буквами A, B, C, то предел отношения разности A+B+C−π, где углы A,B,C измерены в радианной мере, к площади треугольника ABC при стремлении точек B и C к A называется секционной кривизной риманова пространства в точке A в данном двумерном направлении.

Эллиптическое и гиперболическое пространства являются частными случаями риманова пространства. Так как площадь всякого прямолинейного треугольника ABC в эллиптическом пространстве, получаемом из гиперсферы радиуса r, равна r (A+B+C−π), эллиптическое пространство является римановым пространством постоянной положительной кривизны $1/r^2$. Так как площадь всякого прямолинейного треугольника ABC в гиперболическом пространстве, получаемом из гиперсферы мнимого радиуса qi, равна $q^2(\pi-A-B-C)$, гиперболическое пространство является римановым пространством постоянной отрицательной кривизны $-1/q^2$.

Аналогично определяется секционная кривизна в двумерном направлении в псевдоримановом пространстве.

Если в дифференцируемом многообразии для всяких двух бесконечно близких точек определено аффинное отображение касательных пространств в этих точках, многообразие называется пространством аффинной связности.

Если в римановом или псевдоримановом пространстве или в пространстве аффинной связности отражение от каждой точки по геодезическим линиям не изменяет расстояний между точками или сохраняет аффинную связность, пространство называется симметрическим пространством.

Геометрии вещественных евклидовых, псевдоевклидовых, неевклидовых, симметрических, римановых и псевдоримановых пространств посвящены многие главы моих книг 1955, 1966, 1969 и 1997 гг. При этом особое внимание я уделял интерпретациям неевклидовых пространств, так как считаю интерпретации “стереоскопическим зрением геометра”, ибо свойства неевклидовых пространств, которые отличаются от свойст евклидова пространства и ускользают от нашего внимания в одних интерпретациях, хорошо видны в других интерпретациях.

Комплексные и кватернионные пространства

Комплексное квадратичное евклидово пространство определяется так же, как вещественное. Это же пространство является комплексной формой всех вещественных псевдоевклидовых пространств той же размерности.
В случае комплексного и кватернионного эрмитовых евклидовых пространств скалярный квадрат (a,a) является вещественной положительно определенной эрмитовой формой, а в случае комплексного и кватернионного эрмитовых псевдоевклидовых пространств индекса k скалярный квадрат (a,a) является вещественной знаконеопределенной эрмитовой формой индекса k.

Расстояние между точками A и B эрмитова евклидова или псевдоевклидова пространства равно квадратному корню из скалярного квадрата (a,a) вектора a=AB. Нетрудно проверить, что n-мерные комплексное и кватернионное эрмитовы евклидовы пространства изометричны, соответственно, 2n-мерному и 4n-мерному вещественным евклидовым пространствам, а комплексное и кватернионное эрмитовы псевдоевклидовы пространства индекса k изометричны, соответственно, 2n-мерному вещественному псевдоевклидову пространству индекса 2k и 4n-мерному вещественному псевдоевклидову пространству индекса 4k.

Движениями эрмитовых евклидовых и псевдоевклидовых пространств называются аффинные преобразования этих пространств, сохраняющие расстояния между точками.

Если a и b - два вектора комплексного или кватернионного эрмитова пространства, изображаемые в вещественных пространствах ортогональными векторами, то их скалярное произведение (a,b) равно ucos j, где u в случае комплексного пространства - мнимая единица i, а в случае кватернионного пространства - кватернион bi +cj +dk единичного модуля, а j называется углом голоморфности. Угол j равен 0, когда векторы a и b принадлежат одной прямой линии, и равен $\pi/2$, когдя эти векторы принадлежат одной нормальной n-цепи, т.е. множеству точек с вещественными координатами или тому, что получается из этого множества точек при движении пространства. Двумерные площадки, для которых j=0, называются голоморфными, а двумерные площадки, для которых $j=\pi/2$, называются антиголоморфными.

Аналогично, угол голоморфии и голоморфные и антиголоморфные двумерные площадки определяются в комплексных и кватернионных эрмитовых псевдоевклидовых пространствах.

Точки n-мерных комплексного и кватернионного эрмитовых эллиптических пространств можно представить прямыми линиями (n+1)-мерных эрмитовых евлидовых пространств над полем C или телом H, проходящими через одну точку, причем расстояние d между точками равно произведению угла между прямыми на число r, связанное с векторами a и b, направленными по прямым, представляющим эти точки соотношениями $R^2 = (a,a) = (b,b)$. Поэтому $\cos^2(d/r) = (a,b)(b,a)/(a,a)(b,b)$. Отсюда следует, что комплексное и кватернионное эрмитовы эллиптические пространства можно определить как проективное пространство над полем C или телом H, в котором задано расстояние d между точками A и B, представленными векторами a и b, по указанному равенству. Правая часть этого равенства равна двойному отношению точек A и B и точек пересечения полярных гиперплоскостей этих точек относительно эрмитовой гиперквадрики $(x,x)=0$ с прямой AB.

Аналогично определяются комплексные и кватернионные эрмитовы гиперболическое, псевдоэллиптические и псевдогипербопические пространства, но точки этих пространств изображаются точками одной из двух областей, на которые эрмитова гиперквадрика $(x,x)=0$ делит проективное пространство.

Эрмитова гиперквадрика $(x,x)=0$, мнимая в случае эллиптических пространств, называется абсолютом пространства. В случае псевдоэллиптических пространств, указанное двойное отношение, как и в случае эллиптических пространств, равно $\cos^2(d/r)$. В случае гиперболических и псевдогиперболических пространств это двойное отношение равно $\mathrm{ch}^2(d/q)$, где $q^2 =(a,a) = (b,b)$.

Движениями эрмитовых неевклидовых пространств называются проективные преобразования этих пространств, переводящие в себя их абсолюты.

Числа $1/r^2$ и $-1/q^2$ называются кривизнами комплексных и кватернионных эрмитовых неевклидовых пространств.

Комплексные и кватернионные эрмитовы эллиптическое и гиперболическое пространства n измерений являются 2n-мерными и 4n-мерными римановыми пространствами, а n-мерные комплексные и кватернионные эрмитовы псевдоэллиптические и псевдогиперболические пространства индекса k изометричны 2n-мерным псевдоримановым пространствам индекса 2k и 4n-мерным псевдоримановым пространствам индекса 4k.

Прямые линии комплексного и кватернионного эрмитовых эллиптических пространств кривизны $1/r^2$ изометричны, соответственно, сфере радиуса r/2 в 3-мерном евклидовом пространстве и гиперсфере того же радиуса в 5-мерном евклидовом пространстве. Прямые линии остальных комплексных и кватернионных эрмитовых неевклидовых пространств также изометричны сферам 3-мерных пространств и гиперсферам 5-мерных пространств.

В комплексных и кватернионных эрмитовых эллиптических пространствах, так же, как в эрмитовых евклидовых пространствах, можно определить угол голоморфии j двумерной площадки и голоморфные и антиголоморфные двумерные площадки.

Секционная кривизна 2n-мерного и 4n-мерного римановых пространств изометричных n-мерным комплексному и кватернионному эрмитовым эллиптическим пространствам в 2-мерных направлениях равна $K=(1+3\cos j)/r^2$, где j – угол голоморфности 2-мерной площадки в этом направлении, $K=1/r^2$ в антиголоморфных площадках и $K=4/r^2$ в голоморфных площадках. Поэтому римановы пространства изометричные комплексным и кватернионным эрмитовым эллиптическим пространствам называются пространствами постоянной голоморфной секционной кривизны. В этих пространствах можно определить также формулы тригонометрии, которые связывают длины сторон a, b, c геодезических треугольников, их углы A, B, C и углы голоморфии в их вершинах.

Угол голоморфии, голоморфные и антиголоморфные площадки, выражение секционной кривизны в 2-мерном направлении через угол голоморфии и формулы тригонометрии можно определить и в других комплексных и кватернионных эрмитовых неевклидовых пространствах. Римановы и псевдоримановы пространства изометричные этим комплексным и кватернионным пространствам также называются пространствами постоянной голоморфной секционной кривизны.

Комплексные и кватернионные эрмитовы эллиптические и гиперболические пространства допускают интерпретации в вещественных 2n-мерном и 4n-мерном евклидовых пространствах. Гиперболические эрмитовы пространства допускают интерпретацию в шарах евклидовых пространств, причем прямые линии эрмитовых пространств изображаются сечениями шаров, соответственно, 2-мерными и 4-мерными плоскостями, а геодезические линии римановых пространств, изометричных гиперболическим пространствам, изображаются диаметрами этих сечений и дугами окружностей ортогональных гиперсферам, ограничивающим шары. Эллиптические эрмитовы пространства допускают интерпретации в полных евклидовых пространствах, причем прямые линии эрмитовых пространств изображаются, соответственно, 2-мерными и 4-мерными плоскостями, пересекающимися с некоторой гиперсферой, а геодезические линии римановых пространств, изометричных эллиптическим пространствам, изображаются прямыми линиями и окружностями, пересекающими эту гиперсферу в парах диаметрально противоположных точек.

Аналогичные эрмитовы неевклидовы пространства определяются над алгеброй C' двойных чисел и алгеброй H' псевдокватернионов. В отличие от пространств над полем C и телом H в случаях алгебр C' и H' имеется только один вид эрмитовых неевклидовых пространств – эллиптические пространства ; n-мерные пространства этого типа изометричны 2n-мерным псевдоримановым пространствам индекса n и 4n-мерным псевдоримановым пространствам индекса 2n.

Над алгеброй C' двойных чисел можно определить такие же квадратичные пространства, как и над полем R, причем каждое из этих пространств над алгеброй C' допускает интерпретацию в виде пары одноименных вещественных пространств.

Геометрии пространств над полем C, телом H и алгебрами C' и H' посвящены 6 глава в моей книге 1955 г. и несколько глав в моей книге 1997 г. В этих главах описаны многие мои результаты и результаты моих учеников.

Группы Ли

Если группа является топологическим пространством и групповые операции являются гомеоморфными отображениями пространства на себя, такая группа называется топологической группой. Если топологическая группа является аналитическим многообразием, она называется группой Ли. В касательном пространстве в единице группы Ли определена операция коммутирования, ставящая в соответствие каждым двум векторам a и b их коммутатор [ab], причем выполняются условия [ab]=–[ba] и тождество Якоби [a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=0. Линейное пространство с такой операцией называется алгеброй Ли. Если из единицы e гроппы Ли выходит однопараметрическая подгруппа g(t), причем g(0)=e, $g(t_1+t_2)=g(t_1)g(t_2)$, то за координаты вектора a алгебры Ли касательного к этой подгруппе можно принять производные координат элемента g(t) по t при t=0. Если подгруппам g(s) и h(t) соответствуют векторы a и b, то сумма a+b соответствует произведению g(s)h(t), а коммутатор [ab] соответствует произведению g(s)h(t)g(–s)h(–t).

Две группы Ли, алгебры Ли которых совпадают, называются локально изоморфными и алгебра Ли определяет группу Ли с точностью до локального изоморфизма.

Группа Ли называется простой, если она не содержит инвариантных подгрупп меньшей размерности. Группа Ли называется полупростой, если она не содержит разрешимых инвариантных подгрипп.

Алгебра Ли полупростой группы Ли изоморфна прямой сумме алгебр Ли нескольких простых групп Ли.

Всякая некоммутативная простая группа Ли полупроста.

Так как группа Ли является аналитическим многообразием, всякой вещественной группе Ли G соответствует комплексная группа Ли CG, являющаяся ее комплексной формой.

Топологическое пространство называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное покрытие. Среди вещественных групп Ли с общей комплексной формой имеется одна (определенная с точностью до локального изоморфизма) компактная и несколько некомпактных групп. Комплексные группы Ли всегда некомпактны.

В алгебре Ли любой группы Ли можно определить квадратичную форму Ф Киллинга-Картана. Условием полупростоты группы Ли является невырожденность формы Ф. В случае компактных полупростых групп Ли форма Ф является отрицательно определенной, в случае некомпактных полупростых групп Ли форма Ф – знаконеопределенная. Если в последнем случае форма Ф приводится к алгебраической сумме N отрицательных и P положительных квадратов, разность P–N называется характером некомпактной полупростой группы. Форма –Ф определяет инвариантную метрику Картана в полупростой группе Ли, риманову в случае компактных групп и псевдориманову индекса P в случае некомпактных групп. В любых группах Ли однопараметрические подгруппы этих групп и их классы смежности определяют инвариантную аффинную связность.

Элемент a алгебры Ли полупростой группы Ли называется регулярным, если множество элементов b этой алгебры, для которых [ab]=0, имеют наименьшую размерность. Эта наименьшая размерность называется рангом полупростой группы Ли. Указанное подмножество элементов алгебры Ли полупростой группы Ли, называется подалгеброй Картана этой алгебры, а коммутативная подгруппа группы Ли, соответствующая этой подалгебре, называется подгруппой Картана.

Если h – элемент подалгебры Картана H алгебры Ли полупростой группы Ли G, а g – произвольный элемент этой алебры Ли, то коммутатор [hg] является векторной линейной функцией элемента g и может быть записан в виде Ag, где A – линейный оператор. Для всех элементов h соответственные операторы A имеют одни и те же собственные векторы, а собственные числа операторов A, соответствующих одному и тому же собственному вектору, являются линейными формами j =uh на линейном пространстве H, где – u ковектор, определяющий линейную форму. Формы j называются корневыми формами группы G. Так как ковекторы u в случае евклидовой или псевдоевклидовой метрики в подалгебре H, порождаемой метрикой Картана в группе G, можно рассматривать как векторы, то ковекторы u называют корневыми векторами группы G.

В случае, когда группа G компактна, ее корневые формы и корневые векторы чисто мнимы, и корневые векторы могут быть записаны в виде u=iv.

В случае, когда группа G некомпактна, ее корневые формы и корневые векторы могут быть вещественными, чисто мнимыми и комплексно сопряженными.

В случае, когда группа G некомпактна и все ее корневые векторы вещественны, группа называется расщепленной. Характеры расщепленных простых групп всегда равны рангам этих групп. Характеры компактных полупросных групп Ли равны произведениям размерностей этих групп на –1.

Корневые векторы комплексных и компактных простых групп Ли образуют корневые системы, определяемые диаграммами Е.Б.Дынкина.

Корневые системы комплексных простых групп Ли всегда расположены в вещественном подпространстве подалгебры Картана. В этом подпространстве можно ввести систему координат и говорить, что вектор a больше вектора b, если из первых неравных координат этих векторов координата вектора a больше координаты вектора b. Вектор называется положительным или отрицательным, если он, соответственно, больше или меньше нулевого вектора. Согласно Дынкину корневой вектор называется простым, если он положителен и его нельзя представить в виде суммы двух положительных корневых векторов. Число положительных простых корневых векторов простой группы Ли всегда равно рангу группы.

В диаграммах Дынкина комплексных простых групп Ли каждый простой корневой вектор изображается точкой. Эти точки не соединяются линиями, если векторы ортогональны, соединяются 1, 2 и 3 линиями, если угол между векторами равен, соответственно, $2\pi/3$, $3\pi/4$ и $5\pi/6$. В двух последних случаях векторы, изображаемые точками, имеют различную длину, и между точками, изображающими эти векторы ставится знак >.
В случае компактных простых групп Ли такие же диаграммы строятся для вещественных векторов v.

Корневые системы некомпактных простых групп Ли изображаются диаграммами И.Сатаке – видоизмененными диаграммами Дынкина, в которых точки, изображающие вещественные и чисто мнимые корневые векторы, соответственно, белые и черные, а точки, изображающие комплексно сопряженные векторы, – белые, соединенные дугой с двумя стрелками в ее концах.

Как показали В.Киллинг и Э.Картан имеются 4 бесконечные серии алгебр Ли простых комплексных групп Ли, называемых группами классов A_n, B_n, C_n и D_n и 5 отдельных алгебр Ли простых комплексных групп Ли классов G_2 , F_4 , E_6, E_7, E_8, где нижние индексы равны рангам групп. Группы классов A_n, B_n, C_n и D_n называются классическими простыми группами Ли, а группы пяти последних классов называются особыми простыми группами Ли.

Каждая из этих комплексных групп является комплексной формой нескольких локально изоморфных компактных групп и нескольких локально неизоморфных некомпактных групп.

Классические простые группы Ли

Группы классов A_1, B_1, C_1 локально изоморфны; локально изоморфны также группы классов B_2 и C_2, и группы классов A_3 и D_3. Группа класса D_2 полупроста и изоморфна прямому произведению двух групп класса A_1. Группа класса D_1 проста, но не полупроста, эта группа коммутативна и состоит из комплектных чисел cost + isint. Поэтому при перечислении простых полупростых групп Ли группы класса A_n можно начинать с группы A_1 , группы класса B_n можно начинать с группы B_2 группы класса C_n можно начинать с группы C_3 и группы класса D_n можно начинать с группы D_4.

Комплексная простая группа Ли класса A_n локально изоморфна группе унимодулярных (т.е. с единичным определителем) матриц алгебры CM(n+1).

Расщепленная простая группа Ли класса A_n локально изоморфна группе унимодулярных матриц алгебры M(n+1) и группе унимодулярных унитарных матриц алгебры C'M(n+1).

Компактная простая группа Ли класса A_n локально изоморфна группе унимодулярных унитарных матриц алгебры CM(n+1).

Остальные вещественные некомпактные простые группы Ли класса A_n локально изоморфны группам унимодулярных псевдоунитарных матриц алгебры CM(n+1) и группе унимодулярных матриц алгебры HM((n+1)/2); в алгебре кватернионных матриц не существует определителей, но имеются вещественные функции матриц, называемые полуопределителями, и унимодулярными кватернионными матрицами называются матрицы с единичными полуопределителями.

Комплексная простая группа Ли класса B_n локально изоморфна группе унимодулярных ортогональных матриц алгебры CM(2n+1).

Компактная простая группа Ли класса B_n локально изоморфна группе унимодулярных ортогональных матриц алгебры M(2n+1)

Некомпактные вещественные простые группа Ли класса B_n локально изоморфны группам унимодулярных псевдоортогональных матриц алгебры M(2n+1).

Комплексная простая группа Ли класса C_n локально изоморфна группе симплектических матриц алгебры CM(2n).

Расщепленная простая группа Ли класса C_n локально изоморфна группе симплектических матриц алгебры M(2n) и группе унитарных матриц алгебры HM(n).

Компактная простая группа Ли класса C_n локально изоморфна группе унитарных матриц алгебры HM(n).

Остальные некомпактные вещественные простые группы Ли класса C_n локально изоморфны группам псевдоунитарных матриц алгебры HM(n).

Компактная и расщепленная простые группы Ли класса C_1 локально изоморфны, соответственно, группам автоморфизмов алгебр H и H'.

Комплексная простая группа Ли класса D_n локально изоморфна группе унимодулярных ортогональных матриц алгебры CM(2n).

Компактная простая группа Ли класса D_n локально изоморфна группе унимодулярных ортогональных матриц алгебры M(2n) .

Некомпактные вещественные простые группы Ли класса D_n локально изоморфны группам унимодулярных псевдоортогональных матриц алгебры M(2n) и группе симплектических матриц алгебры HM(n).

Группы унимодулярных ортогональных и псевдоортогональных матриц алгебры M(n) являются фактор-группами подгрупп алгебр A(n) и A(n-k, k) по их инвариантным подгруппам, состоящим из элементов 1 и -1 ; эти подгруппы называются спинорными группами.

Рассщепленная простая группа Ли класса A_n локально изоморфна группе проективных преобразований n-мерного вещественного проективного пространства.

Компактная простая группа Ли класса A_n локально изоморфна группе движений n-мерного комплексного эрмитова эллиптического пространства.

Некомпактные вещественные простые группы Ли класса A_n локально изоморфны группам движений n-мерных комплексных эрмитовых гиперболического псевдоэллиптических и псевдогиперболических пространств и группе проективных преобразований (n-1)/2-мерного кватернионного проективного пространства.

Компактная простая группа Ли класса B_n локально изоморфна группе движений 2n-мерного вещественного эллиптического пространства.

Некомпактные простые группы Ли класса B_n локально изоморфны группам движений 2n-мерных вещественных гиперболического, псевдоэллиптических и псевдогиперболических пространств.

Расщепленная простая группа Ли класса C_n локально изоморфна группе симплектических преобразований (2n-1)-мерного симплектического пространства.

Компактная простая группа Ли класса C_n локально изоморфна группе движений (n-1)-мерного кватернионного эрмитова эллиптического пространства.

Остальные некомпактные вещественные простые группы Ли класса C_n локально изоморфны группам движений (n-1)-мерных кватернионных гиперболического, псевдоэллиптических и псевдогиперболических пространств.

Компактная простая группа Ли класса D_n локально изоморфна группе движений (2n-1)-мерного вещественного эллиптического пространства.

Некомпактные простые группы Ли класса D_n локально изоморфны группам движений (2n-1)-мерных вещественных гиперболического, псевдоэллиптических и псевдогиперболических пространств и группе симплектических преобразований (n-1)-мерного кватернионного симпектического пространства.

Классические простые группы Ли допускают также интерпретации в виде групп движений пространств над тензорными произведениями алгебр C, C', H и H'. В частности из того, что тензорное произведение двух полей C изоморфно прямой сумме этих полей, вытекает, что эрмитово эллиптическое пространство над тензорным произведением двух полей C допускает модель в виде пары комплексных эрмитовых эллиптических полей той же размерности. Из того, что тензорное произведение алгебр C и H изоморфно алгебре CM(2), вытекает, что n-мерное эрмитово эллиптическое пространство допускает модель в виде многообразия прямых линий (2n + 1)-мерного комплексного эрмитова эллиптического пространства. Из того, что тензорное произведение двух алгебр H изоморфно алгебре M(4), вытекает, что n-мерное эрмитово эллиптическое пространство над тензорным произведением двух алгебр H допускает модель в виде многообразия 3-мерных плоскостей (4n+3)-мерного вещественного эллиптического пространства. Эти модели были построены моими учениками Н.Т.Аббасовым и Л.В.Румянцевой.

Образы симметрии

Все вещественные и эрмитовы неевклидовы пространства, группы движений которых простые группы Ли, изометричны симметрическим римановым или псевдоримановым пространствам, поэтому точки этих пространств являются образами симметрии. Образами симметрии являются также 0-пары (т.е. пары точка + гиперплоскость) проективных пространств и m-пары (т.е.пары n-m-1)-мерная плоскости)n-мерного проективного пространства. Отражение точки X от 0-пары, состоящей из точки A и гиперплоскости U, переводит точку X в точку X' прямой AX, являющуюся четвертой гармонической для точек A, X и точки пересечения прямой AX с гиперплоскостью U. Отражение точки X от m-пары, состоящей из плоскостей A и U, переводит точку X в точку X' единственной прямой, проходящей через точку X и пересекающей плоскости A и U, которая является четвертой гармонической для точки X и точки пересечения упомянутой прямой A с плоскостями A и U.

В неевклидовых пространствах, являющихся метризованными проективными, образами симметрии являются также m-мерные плоскости, при m=1 прямые линии образующие вместе с плоскостями полярными относительно абсолютов m-пары.

При рассмотрении вещественных и эрмитовых неевклидовых пространств с простыми группами движений я всегда находил образы симметрии этих пространств. Особенно просто это в случае пространст с компактными группами движений, так как инволютивные движения, определяющие образы симметрии этих пространств, определяют также некомпактные группы с той же комплексной формой, что и компактная простая группа Ли. Замечу, что диаграммы Сатаке для некомпактных простых групп Ли первоначально применялись для изучения симметрических римановых пространств с некомпактными простыми группами движений. Эти симметрические пространства допускают интерпретации в виде многообразий образов симметрии неевклидовых пространств с компактными группами движений.

Образами симметрии неевклидовых пространств кроме точек и m-мерых плоскостей являются паратактические конгруенции и n-цепи. Паратактические конгруенции имеют место в (2n+1)-мерных вещественных эллиптических и комплексных эрмитовых эллиптических пространствах, они состоят из заполняющих все пространство паратактичных прямых, т.е. прямых с равными стационарными расстояниями. Симметриями относительно этих конгруенций в случае вественных пространств являются сдвиги на полупрямую вдоль прямых конгруенции, а в случае комплексных пространст – переходы от точек прямых линий конгруенции к диаметрально противоположным точкам сфер изометричным этим линиям.

Нормаьные n-цепи имеют место в n-мерных комплексных и кватернионных эрмитовых эллиптических пространствах. Эти образы состоят из точек с соответственно вещественными или комплексными координатами или являются фигурами, получаемыми из этих образов движениями пространства. Симметрии относительно нормальных n-цепей определяются переходами от комплексных координат к комплексно сопряженным и от кватернионных координат вида a+bi+cj+dk к координатам вида $a+bi-cj-dk$. Нормальные n-цепи изометричны, соответственно, n-мерным вещественному эллиптическому и комплексному эрмитову эллиптическому пространствам.

В проективных просранствах имеются также образы косимметрии – гиперквадрики и линейные комплексы прямых, симметриями относительно которых являются полярные преобразования относительно этих образов.

Две m-пары проективного пространства в основном случае обладают $m+1$ директрисами – прямыми пересекающими все четыре плоскости m-пар. Директрисы являются геометрическими ковариантами двух m-пар, а двойные отношения точек их пересечения с плоскостями m-пар – числовыми инвариантами n-пар.

Общие перпендикуляры двух m-мерных плоскостей являются директрисами этих плоскостей и их полярных плоскостей, а стационарные расстояния двух m-мерных плоскостей определяются числовыми инвариантами соответственны m-пар.

Параболические образы

В пространствах, группы движений которых – простые группы Ли, я находил параболические образы, определяемые параболическими подгруппами группы движений пространтва, т.е. подгруппами, содержащими максимальную разрешимую подгруппу группы движений, называемую подгруппой А.Бореля. Всякая параболическая подгруппа определяется одним или несколькими простыми корневыми векторами группы Ли. В случае, когда параболическая подгруппа определяется одним простым корневым вектором, пораболический образ называется фундаментальным. Все параболические образы вещественны в случае расщепленных групп, все эти образы мнимы в случае компактных групп. Эти образы могут быть вещественными, мнимыми и комплексно сопряженными в случае некомпактных нерасщепленных групп.

Параболические образы изучались И.М.Гельфандом и его сотрудниками и Хариш-Чандрой в связи с теорией унитарных представлений некомпактных простых групп Ли.

Фундаментальные параболические образы связаны с фундаментальными линейными представлениями простых групп Ли, определенными Э.Картаном в 1913 г. Эти образы изучались Жаком Титсом, который называл их фундаментальными элементами.

Фундаментальными параболическими образами в случае n-мерного вещественного проективного пространства являются m-мерные плоскости (при $m=0$ точки, при $m=1$ прямые линии, при $m= n-1$ – гиперплоскости).

Фундаментальными параболическими образами в случае $2n$-мерных и $(2n-1)$-мерных вещественных неевклидовых пространств являются m-мерные плоские образующие абсолюта (при $m=0$ точки, при $m=1$ прямолинейные образующие). Плоские образующие максимальной размерности абсолютов этих пространств $(n-1)$-мерны, эти плоские образующие составляют одно связное семейство в $2n$-мерном пространстве и два связных семейства в $(2n-1)$-мерном пространстве. В последнем случае $(n-2)$-мерные плоские образующие - параболические образы не являющиеся фундаментальными. Плоские образующие максимальной размерности абсолютов вещественных неевклидовых пространств связаны со спинорными представлениями групп движений этих пространств.

Фундаментальными параболическими образами в случае $(2n-1)$-мерного вещественного симплектического пространства являются точки и m-мерные нуль-плоскости (при $m=1$ нуль-прямые). Нуль-прямые вещественного симплектического пространства образуют абсолютный линейный комплекс этого пространства.

Фундаментальные параболические образы комплексных и кватернионных проективных и эрмитовых неевклидовых и симплектических пространств аналогичны параболическим образам вещественных пространств. Параболическими образами конформных и псевдоконформных пространств являются их точки и m-мерные изотропные плоскости, при $m=1$ - изотропные прямые.

Фундаментальные параболические образы пространств, фундаментальными грппами которых являются простые группы Ли, изображаются точками диаграмм Дынкина и Сатаке. В последнем случяе черные точки диаграмм Сатаке изображают вещественные образы, белые точки - мнимые образы, а белые точки, соединенные дугами с двумя стрелками, - комплексно сопряженные образы.

Со всяким параболическим образом связано представление фундаментальной группы пространства в виде прямой суммы $2k+1$ линейных подпространств $J+K+ . . .+L$. Подпространства J и L этой прямой суммы являются элластичными алгебрами, определенными И.Л.Кантором. В случае $k =1$ алгебры J и L являются йордановыми алгебрами М.А.Джавадов и И.И.Колокольцева доказали, что спонорные предстаавлениягрупп движений неевклидобых пространств изображаются дробно-линейными преобразованиями этих йордановых алгебр.

Геометрические интерпретации, связанные с изоморфизмами простых и полупростых групп Ли

Упомянутые выше изоморфизмы простых и полупростых групп Ли ранга 1, 2 и3 определяют изоморфизмы вещественных простых и полупростых групп Ли с теми же рангами. С этими изоморфизмами вещественных групп Ли связаны геометрические интерпретации однородных пространств, фундаментальными группами которых являются эти группы Ли.

1) С локальным изоморфизмом компактных групп классов A_1 и B_1 связана изометричность комплексной эрмитовой эллиптической прямой линии кривизны $1/r^2$ и сферы радиуса $r/2$ 3-мерного евклидова пространства.

2) С локальным изоморфизмом расщепленных групп классов A_1 и B_1 связана интерпретация О.Гессе плоскости Лобачевского на вещественной проективной прямой, при которой точки проективной прямой изображаются точками абсолюта плоскости Лобачевского, а пара точек проективной прямой – прямыми линиями плоскости Лобачевского.

3) С локальным изоморфизмом компактной группы класса D_2 и прямого произведения двух компактнх групп класса А связана интерпретация А.П.Котельникова многообразия прямых линий 3-мерного вещественного эллиптического пространства на сфере двойного 3-мерного евклидова пространства, при которой пара полярно сопряженных прямых линий эллиптического пространства изображаются 4 точками пересечения сферы двойного пространства с диаметральными прямыми этой сферы .

4) С локальным изоморфизмом некомпактной группы класса D_2 и комплексной группы класса A_1 связана интерпретация А.П.Котельникова многообразия прямых линий 3-мерного пространства Лобачевского на сфере 3-мерного комплексного евклидова пространства, при которой прямые линии пространства Лобачевского изображаются парами диаметрально противоположных точек сферы комплексного пространства.

5) С локальным изоморфизмом некомпактной вещественной группы класса D_2 и прямого произведения некомпактной и расщепленной групп класса A_1 связана интерпретация Л.В.Румянцевой кватернионной симплектической прямой линии на паре комплексных эрмитовых прямых линий, эллиптической и гиперболической, при которой точки кватернионной прямой линии изображаются парами точек комплексных прямых линий, по одной точке на каждой линии.

6) С локальным изоморфизмом компактных групп классов B_2 и C_2 связана изометричность кватернионной эрмитовой эллиптической прямой линии кривизны $1/r^2$ и сферы радиуса $r/2$ 5-мерного евклидова пространства.

7) С локальным изоморфизмом расщепленных групп классов B_2 и C_2 связана интерпретация 4-мерного вещественного псевдоэллиптического пространства индекса 2 в 3-мерном вещественном симплектическом пространстве, при которой 2-мерные плоские образующие абсолюта псевдоэллиптического пространства изображаются нуль-прямыми симплектического пространства.

8) С локальным изоморфизмом компактных групп классов A_3 и D_3 связана интерпретация Н.Д.Пецко 3-мерного комплексного эрмитова эллиптического пространства в 5-мерном вещественном эллиптическом пространстве при которой точки каждого из этих пространств изображаются паратактическими конгруэнциями прямых линий другого пространства.

9) С локальным изоморфизмом расщепленных групп классов A_3 и D_3 связана интерпретация Ю.Плюккера 3-мерного вещественного проективного пространства в 5-мерном вещественном псевдо-эллиптическом пространстве индекса 3, при которой прямые линии 3-

мерного пространства изображаются точками абсолюта 5-мерного пространства.

10) С локальным изоморфизмом некомпактных вещественных групп классов A_3 и D_3 связана интерпретация Р. Пенроуза 4-мерного псевдоконформного пространства индекса 1, в 3-мерном комплексном эрмитовом псевдоэллиптическом пространстве индекса 2, при которой точки псевдоконформного пространства изображаются прямолинейными образующими абсолюта комплексного пространства.

При этих интерпретациях образы симметри и параболические образы одного пространства изображаются такими же образами другого пространства.

Особые простые группы Ли

Алгебра альтернионов не является единственным обобщением тела кватернионов, другим обобщением является алгебра O октонионов или октав. Базис этой алгебры состоит из 8 элементов 1, i, j, k, l, p, q, r, причем элементы 1, i, j, k, элементы 1, k, p, q, элементы 1, q, r, i, элементы 1,i, l,p, элементы 1, k,, l, r, элементы 1, q, l, j и элементы 1, j, p, r образуют базисы алгебр кватернионов. Алгебра октонионов является телом, но не ассоциативным, так как (ij)l= –i(jl). Это тело является альтернативным, т.е. любые два элемента этого тела порождают ассоциативное подтело (тело H или поле C).

Аналогично определяется алгебра O' псевдооктонионов – алгера с базисом 1, i, j, k, e, f, q, h, последние 4 из которых можно рассматривать как произведение базисных элементов l, p, q, r алгебры O на мнимую единицу, коммутурующую с элементами алгебры O. Алгебра O' является альтернативной алгеброй с делителями нуля.

Группы автоморфизмов тела O и алгебры O' являются, соответственно, компактной и расщепленной простыми гуппами Ли класса G_2. Если ввести в алгебры O и O' метрики 8-мерных вещественных евклидова пространства и псевдоевклидова пространства индекса 4, в которых расстояние между элементами a и b равно модулю элемента b-a, то группы Ли автоморфизмов алгебр O и O' будут транзитивными на пересечениях гиперсфер, центрами которых являются нулевые элементы алгебр, с диаметральными гиперплоскостями этих гиперсфер ортогональными элементу 1.

Если отождествить диаметральнопротивоположные точки, полученных 6-мерных сфер, мы получим 6-мерные G-эллиптическое, G-псевдоэллиптическое и G-псевдогиперболическе пространства, группами преобразований являются компактная и расщепленная простые группы Ли класса G_2. Эти пространства обладают почти комплексной или почти двойной структурой, т.е. касательные гиперплоскости этих гиперсфер обладают комплексной или двойной структурой, но в самих 6-мерных пространствах нельзя ввести комплексные или двойные координаты.

Геометрия этих пространств изучалась моими ученицами Н.Н.Адамушко и Р.Г.Тлуповой.

Компактная и расщепленная простые группы Ли класса F_4 имеют характеры, соответственно, –52 и 4. Имеется еще одна некомпактная вещественная простая группа Ли этого класса с характером –2.

Компактная и расщепленная простые группы Ли класса E_6 имеют характеры,соответственно, –78 и 6. Имеются еще три некомпактные вещественные простаыегруппы Ли этого класса с характерами –26, –14, и 2

Компактная и расщепленная простые группы Ли класса E_7 имеют характеры,соответственно, –133 и 7. Имеются еще две некомпактные вещественные простаые группы Ли этого класса с характерами – 25 и – 5.

Компактная и расщепленная простые группы Ли класса E_8 имеют характеры,соответственно, –248 и 8. Имеется еще одна некомпактная вещественная простая группя Ли этого класса с характером – 24.

Геометрия особых простых групп Ли

Фрейденталь в 1951 г. в статье “Октонионы, особые группы и октонионная геометрия” доказал,что компактная простая группа Ли класса F_4 локально изоморфна группе движений 2-мерной октонионной эрмитовой эллиптической плоскости, а некомпактная вещественная простая группа Ли класса E_6 с характером –26 локально изоморфна группе проективных преобразований 2-мерной октонионной проективной плоскости.Так как тело

O неассоциативно и следовательно произведение (xa)b не равно x(ab), точки октонионной проективной плоскости нельзя определить тремя октонионными координатами с точностью до прабого октонионного множителя. Поэтому Фрейденталь определял точки рассматриваемых им плоскостей октонионными эрмитово симметричными матрицами 3-го порядка, удовлетворяющими некоторым условиям, при которых эти матрицы определяются с точностью до вещественного множителя. Условия, наложенные Фрейденталем на эти октонионные матрицы 3-го порядка равносильны тому, что все элементы этих матриц принадлежат к одному ассоциативному подтелу тела O.

Ознакомившись с этой работой Фрейденталя, я определил на октонионной проективной плоскости O-пары, состоящие из точек и прямых, ввел в многообразие этих O-пар метрику аналогичную метрике вмногообразии O-пар вещественного проективного пространства, и доказал, что полученное метрическое пространство изометрично эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр C’ и O, группа движений которой изоморфна некомпактной группе класса E_6 с характером –26. Отсюда я сделал вывод, что компактная группа класса E_6 изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр C и O.

Из того, что все элементы матриц Фрейденталя принадлежат к одному ассоциативному подтелу тела O следует, что каждая точка октонионной проективной плоскости, а значит. и каждая точка проективной плоскости надтензорным произведением алгебр C и O, может быть определена тремя координатами из алгебры O или тензорного произведения алгебр C и O, принадлежащими к одной ассоциативной подалгебре этих алгебр и определенными с точностью до правого сомножителя из той же ассоциативной подалгебры.

Представление компактной группы класса E_6 в виде эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр C и O обобщается на компактные группы классов E_7 и E_8, которые можно представить, соответственно, в виде групп движений эрмитовых эллиптических плоскостей над тензорным произведением алгебр H и O и над тензорным произведением двух алгебр O. Я высказал предположение об этом факте в 1956 г., на основании того,что, как указал Э.Картан, компактные группы классов E_7 и E_8 являются группами движений симметрических римановых пространств размерности 64 и 128. Мое предположение было доказано Э.Б.Винбергом в 1964 г.

Продолжая исследования Фрейденталя, Ж.Титс доказал, что некомпактная вещественная простая группа Ли с характером -20 является группой движений октонионной эрмитовой гиперболической плоскости. Впоследствии я доказал, что расщепленная простая группа Ли этого класса является группой движений псевдооктонионной эрмитовой эллиптической плоскости и построил аналогичные геометрические интерпретации для всех некомпактных вещественных групп Ли классов E_6, E_7 и E_8. Геометрические интерпретации всех вещественных особых простых групп Ли рангов 4, 6, 7 и 8 имеют следующий вид.

Компактная простая группа Ли класса F_4 локально изоморфна группе движений октонионной эрмитовой эллиптической плоскости.

Некомпактная вещественная простая группа Ли класса F_4 с характером -20 локально изоморфна группе движений октонионной эрмитовой гиперболической плоскости.

Расщепленная простая группа Ли класса F_4 локально изоморфна группе движений псевдооктонионной эрмитовой эллиптической плоскости.

Компактная простая группа Ли класса E_6 локально изоморфна группе двиэжений эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр C и O.

Некомпактная вещественная простая группа Ли класса E_6 с характером -14 локально изоморфна группе движений эрмитовой гиперболической плоскости над тензорным произведением алгебр C и O.

Некомпактная вещественная простая группа Ли класса E_6 с характером -26 локально изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр C' и O и группе проективных преобразований октонионной проективной плоскости.

Некомпактная вещественная простая группа Ли класса E_6 с характером 2 локально изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр C и O'.

Расщепленная простая группа Ли класса E_6 локально изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр C' и O' и группе проективных преобразований псевдооктонионной проективной плоскости.

Компактная простая группа Ли класса E_7 локально изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр H и O.

Некомпактная вещественная простая группа Ли класса E_7, с характером –5 локально изоморфна группам движений эрмитовой гиперболической плоскости над тензорным произведением алгебр H и O и эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр H' и O.

Некомпактная вещественная простая группа Ли класса E_7 с характером –25 локально изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр H и O'.

Расщепленная простая группа Ли класса E_7 локально изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр H' и O' .

Компактная простая группа Ли класса E_8 локально изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением двух алгебр O.

Некомпактная вещественная простая группа Ли класса E_8 с характером –24 локально изоморфна группам движений эрмитовой гиперболической плоскости над тензорным произведением двух алгебр O и эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр O и O'.

Расщепленная простая группа Ли класса E_8 локально изоморфна группе движений эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением двух алгебр O'.

Проективные и неевклидовы пространства над неассоциативными алгебрами не могут иметь размерность больше 2, так как в этом случае теорема Дезарга равносильная ассоциативности алгебры, над которой построено пространство, является следствием аксиом сочетания проективной геометрии.

Вскоре после того как я прочел цикл лекций о геометриях групп Ли в Утрехте Фрейденталь написал мне, что, обсуждая мои лекции с Титсом они пришли к выводу, что мои геометрические интерпретации особых простых групп Ли невозможны, так как размерностей линейных представлений простых групп Ли классов F_4, E_6, E_7 и E_8, определяемых моими интерпретациями, нет в списке линейных представлений этих групп, утановленном Картаном в 1913 г.

Я ответил Фрейденталю, что представления этих групп, определяемые моими интерпретациями, не являются линейными.

Выше я писал, что точки октонионной проективной плоскости можно определять тремя октонионными координатами, принадлежащими к одному ассоциативному подтелу тела О, и поэтому точки октонионной проективной плоскости можно определять тремя октонионными координатами, находящимися в одном ассоциативном подтеле тела О и заданными с точностью до правого множителя, являющегося элементом того же подтела. Поэтому при проективных преобразованиях октонионной плоскости три координаты x_i точек этой плоскости подвергаются некоторому автоморфизму тела О, который переводит их в три октониона $f(x_i)$, также принадлежащие к одному ассоциативному подтелу тела О, эти три октониона подвергаются линейному преобразованию с помощью октонионной матрицы 3-го порядка, полученной "проектированием" матрицы группы, представляющей группу проективных преобразований октонионной плоскости, на то подтело, к которому принадлежат октонионы $f(x_i)$.

Движения октонионной эрмитовой эллиптической плоскости определяются таким же образом, но матрица третьего порядка, преобразующая октонионы $f(x_i)$, получается "проектированием" унитарной октонионной матрицы 3-го порядка.

Координаты точек 2-мерных эрмитовых эллиптических и гиперболических плоскостей, группы движений которых являются особыми простыми группами Ли рангов 4, 6, 7 и 8, а также сами движения этих групп, определяются аналогично.

Образы симметрии компактных особых простых групп Ли имеют следующий вид.

В 6-мерном G-эллиптическом пространстве имется только один вид образов симметрии - точки.

В октонионной эрмитовой эллиптической плскости имеются два вида образов симметрии - точки и нормальные кватернионные 2-цепи, определяемые аналогично комплексным нормальным n-цепям кватернионного пространства.

В эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр C и O имеются четыре вида образов симметрии - точки, октонионные нормальные 2-цепи, комплексно -кватернионные 2-цепи и нормальные 2-бицепи. В этом случае нормальные 2-цепи определяются переходами от поля C к полю R и от тела O к телу H в одном из сомножителей тензорного произведения, нормальные 2-бицепи определяются такими же переходами в обоих сомножителях тензорного произведения.

В эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр H и O имеются также четыре вида образов симметрии - точки, комплексно-октонионные нормальные 2-цепи, кватернионно-кватернионные 2-цепи и нормальные 2-бицепи. В этом случае нормальные 2-цепи определяются переходами от тела H к полю C и от тела O к телу H в одном из сомножителей тензорного произведения, нормальные 2-бицепи определяются такими же переходами в обоих сомножителях тензорного произведения.

В эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением двух алгебр O имеются три вида образов симметрии – точки, кватернионно-октонионные 2-цепи и нормальные 2-бицепи. В этом случае нормальные 2-цепи определяются переходом от тела O к телу H в одном из сомножителей тензорного произведения, нормальные 2-бицепи определяются таким же переход в обоих сомножителях тензорного произведения.

Принципы двойственности и тройственности

Принцип двойственности n-мерной вещественной проективной геометрии связан с двусторонней симметрией диаграммы Дынкина простой группы класса A_n. Соглацно этому принципу гиперплоскости и m-мерные плоскости n-мерного пространства изображаются точки и (n-m-1)-мерные плоскости некоторого другого проективного прпстранства той же размерности.

Эта внутренняя симметрия в группе была ясна Э.Картану задолго до появления диаграммы Дынкина. Еще в 1925 г. Картан опубликовал статью "Принцип двойственности и теория простых и полупростых групп", в которой он обобщил принцип двойственности для простых групп Ли класса A на простые группы класса D_n и на простую группу Ли класса E_6. Диаграммы Дынкина этих групп также обладают двусторонней симметрией. В случае групп класса D_n двойственными образами являются плоские образующие максимальной размерности абсолюта, принадлежащие к двум разным семействам.

Простая группа класса E_6, локально изоморфна группе проективных преобразований 2-мерной октонионной проективной плоскости, на этой плоскости точки двойственны прямым линиям.

В случае простой группы класса D_4 диаграмма Дынкина обладает трехсторонней симметрией. Для этой группы Картан в той же статье 1925 г. сформулировал принцип тройственности. Для 7-мерных вещественных эллиптического пространства и псевдоэллиптического пространства индекса 4, группы движений которых являются компактной и расщепленной группами этого класса, тройственными образами являются 3-мерные плоские образующие абсолюта двух семейств и точки абсолюта, Эти образы мнимы в эллиптическом пространстве и вещественнын в псевдоэллиптическом пространстве. В обоих случаях вещественными тройственными образами являются прямые и паратактические конгруенции двух семейств. Из последнего факта вытекает изоморфизм группы движений 7-мерного вещественного псевдоэллиптического пространства индекса 2 и группы симплектических преобразований 3-мерного кватернионного симплектического пространства, а также интерпретация Л.В.Румянцевой одного из этих пространств в другом.

Симплектическая и метасимплектическая геометрии Фрейденталя

В серии работ под общим названием “Отношения групп E_7 и E_8 к октонионной плоскости”, опубликованной в 1954 –1963 гг., Фрейденталь нашел геометрические интерпретации некоторых некомпактных простых групп Ли классов F_4, E_6, E_7 и E_8 Фрейденталь ввел понятие 5-мерного октонионного симплектического пространства. Это пространство нельзя определить как проективное пространство с более узкой группой преобразований. так как над алгеброй O не существует проективных пространств размерности больше 2. Фрейденталь называл 5-мерным октонионным симплектическим пространством только аналог многообразия 2-мерных нуль-плоскостей 5-мерного кватернионного симплектического пространства. Фрейденталь доказал, что группа симплектических преобразований этого пространства является некомпактной простой группой Ли класса E7 с характером –25.

В той же серии работ Фрейденталь определил четыре метасимплектические геометрии – вещественную, комплексную, кватернионную и октонионную, и доказал, что группами преобразований этих геометрий являются, соответственно, расщепленная простая группа Ли класса F4 и некомпактные вещественные простые группы Ли класса E_6 с характером –26, класса E_7 с характером –25 и класса E_8 с характером –24.

В моих дальнейших работах я доказал, что расщепленная простая группа Ли класса E_7 локально изоморфна группе симплектических преобразований псевдооктонионного аналога 5-мерного симплектического пространства Фрейденталя, а расщепленные простые группы Ли классов F_4, E_6, E_7 и E_8 локально изоморфны группам преобразований псевдооктонионных аналогов метосимплектических геометрий Фрейденталя.

Изоморфизмы групп преобразований этих геометрий и групп движений эрмитовых эллиптических плоскостей над различными алгебрами определяют интерпретации этих геометрий на указанных плоскостях.

В той же серии работ Фрейденталь определил “магический квадрат”, состоящий из 16 простых и полупростых групп Ли, расположенных в виде квадрата. В 1-й строке этого квадрата находятся группы движений 2-мерных вещественной эллиптической плоскости и комплексной кватервионной и октонионной эрмитовых эллиптических плоскостей, во 2-й строке – группы проективных преобразований 2-мерных вещественной, комплексной, кватернионной и октонионной проективных плоскостей, в 3-ей строке – группы симплектических преобразований 5-мерных вещественного, комплексного, кватернионного и октонионного симплектических пространств, в 4-ой строке – группы преобразований вещественной, комплексной, кватернионной и октонионной метасимплектических геометрий. Название метасимплектических геометрий определяется их положением в этом квадрате после симплектических пространств.

Этот квадрат обладает замечательным свойством симметрии: группы симметричные относительно главной диагонали квадрата являются группами одного и того же класса и ранга. Эта симметрия следует из того, что группы 2-й строки этого квадрата изоморфны группам движений эрмитовых эллиптических плоскостей над тензорными произведениями алгебр R, C, H и O на алгебру C', группы 3-ей строки этого квадрата изоморфны группам движений эрмитовых эллиптических плоскостей над тензорными произведениями алгебр R, C, H и O на алгебру H', группы 4-й строки этого квадрата изоморфны группам движений эрмитовых эллиптических плоскостей над тензорными произведениями алгебр R, C, H и O на алгебру O'.

Заменяя в этом квадрате алгебры C', H' и O' полем C и телами H и O, мы получим "магический квадрат" для компактных групп. Заменяя в квадрате Фрейденталя поле C и тела H и O алгебрами C', H' и O', мы получим "магический квадрат" для расщепленных групп.

Если мы заменим в "магическом квадрате" Фрейденталя для компактных групп каждую группу движений эллиптической плоскости прямой линией этой плоскости, мы получим аналог квадрата Фрейденталя эрмитовы эллиптические прямые над тензорными произведениями алгебр R, C, H, O на алгебру H,в третьей строке - эрмитовы эллиптические прямые над тензорными произведениями алгебр R, C, H, O на алгебру H, в четвертой строке - эрмитовы эллиптические прямые над тензорными произведениями алгебр R, C, H, O на алгебру O.

Прямые линии первой строки изометричны, соответственно, вещественной окружности и вещественным сферам 2, 4 и 8 измерений и поэтому допускают интерпретации в виде многообразий точек вещественной эллиптической прямой, прямых вещественной эллиптической плоскости, 3-мерных плоскостей 4-мерного вещественного эллиптического пространства и 7-мерных плоскостей 8-мерного вещественного эллиптического пространства. Прямые второй строки допускают интерпретации в виде многообразий точек вещественной эллиптической плоскости, прямых 3-мерного вещественного эллиптического пространства, 3-мерных плоскостей 5-мерного вещественного эллиптического пространства и 7-мерных плоскостей 9-мерного вещественного эллиптического пространства. Прямые третьей строки допускают интерпретации в виде мнгообразий точек 4-мерного вещественного эллиптического пространства, прямых 5-мерного вещественного эллиптического пространства, 3-мерных плоскостей 7-мерного вещественного эллиптического пространства и 7-мерных плоскостей 11-мерного вещественного эллиптического пространства. Прямые четвертой строки допускают интерпретации в виде мнгообразий точек 8-

мерного вещественного эллиптического пространства, прямых 9-мерного вещественного эллиптического пространства, 3-мерных плоскостей 11-мерного вещественного эллиптического пространства, 7-мерных плоскостей 15-мерного вещественного эллиптического пространства.

Фрейденталь рассматривал в метасимплектических геометриях симплекты, т.е. многообразия 2-мерных нуль-плоскостей 5-мерных симплектических пространств, а также 2-мерные плоскости симплектов, прямые и точки этих плоскостей. Все эти образы являются фундаментальными параболическими образами метасимплектических геометрий, рассматриваемых Фрейденталем, причем в указанных геометриях все эти образы вещественны, а остальные фундаментальные образы мнимы. Точки плоскостей симплектов совпадают с точками абсолютов соответственных 2-мерных эрмитовых плоскостей.

Пересечение прямых линий эрмитовых эллиптических плоскостей, группы движений которых максимальные особые группы Ли

В 2003г. Э.Б.Винберг обнаружил, что две прямые линии эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением алгебр H и O пересекаются не в одной, а в трех точках, и что две прямые линии эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением двух алгебр O пересекаются в 135 точках. Из уравнения прямой линии $S_i u_i x_i = 0$ на этих плоскостях вытекает, что ассоциативные подалгебры тензорных произведений алгебр H и O и двух алгебр O, связанные с общими точками двух прямых эрмитовых эллиптических плоскостей, - одни и те же. Так как максимальная ассоциативная подалгебра алгебры O - алгебра H, а эрмитова эллиптическая прямая над тензорным произведением двух алгебр H 16-мерна, все 135 общих точек двух прямых на эрмитовой и эллиптической плоскости над тензорным произведением двух алгебр O находятся в 16-мерном подмножестве каждой из этих эрмитовых эллиптических прямых. Эти 135 точек изображаются 7-мерными плоскостями, находящимися в одной 9-мерной плоскости 15-мерного эллиптического пространства, изображающего прямую над тензорным произведением двух алгебр O. Так как полярами 7-мерных плоскостей в 9-мерном эллиптическом пространстве являются прямые линии, 135 общих точек двух прямых линий на эрмитовой эллиптической плоскости над тензорным произведением двух алгебр O изображаются 135 прямыми линиями 9-мерного вещественного эллиптического пространства. Эти прямые линии лежат в 4-мерной плоскости 9-мерного эллиптического пространства.

Группы Вейля простых групп Ли

С каждой компактной простой группой Ли связаны две конечные группы - группа Галуа уравнения Киллинга компактной простой группы Ли и группа Вейля, порожденная отражениями от гиперплоскостей эвклидова пространства, размерность которой равна рангу компактной группы, проходящих через общее начало корневых векторов компактной простой группы Ли ортогонально этим векторам. Эти группы обозначаются, соответственно, Г и W. Эти две группы изоморфны для всех компактных простых групп Ли, кроме групп классов A_n, D_n и E_6, в случае же групп этих классов группа W является инвариантной подгруппой гриппы Г, причем фактор-группы Г/W во всех случаях кроме случая группы класса D_4состоят из двух элементов, а для группы D_4 фактор гуппа Г/W состоит из 3!=6 элементов. Этот факт тесно связан с принципами двойственности и тройственности в пространствах, фундаментальные группы которых являются простые группы Ли классов A_n, D_n и E_6.

Группа Вейля компактной простой группы Ли класса A_n изоморфна группе симметрий n-мерного правильного симплекса, Группа Вейля компактной простой группы Ли класса A_n изоморфна группе симметрий n-мерного правильного симплекса, Группы Вейля компактных простых группы Ли классов B_n и C_n изоморфны группе симметрий n-мерного куба. Группа Вейля компактной простой группы Ли класса D_n изоморфна группе симметрий n-мерного “полукуба”, т.е. фигуры, получаемой из n-мерного куба удалением одной из каждых двух вершин, соединяемых ребрами куба. Группа Вейля компактной простой группы Ли класса G_2 изоморфна группе симметрий правильного 6-угольника. Группа Вейля компактной простой группы Ли класса F_4 изоморфна группе симметрий 4-мерного “бикуба”, т.е. фигуры,вершины которой получаются из вершин 4-мерного куба добавлением 16 отражений центра симметрии куба от его граней.

Группа Вейля компактной простой группы Ли класса E_6 изоморфна группе симметрий кубической поверхностив 3-мерном проективном пространстве с 27 прямолинейными образующими, уравнение которой можно привести к виду ace = bdf, где a, b, c, d, e, f - линейные полиномы, а группа Вейля компактной простой группы Ли класса E_7 изоморфна группе симметрий линии 4-го порядка на проективной плоскости, с 28 двойными касательными.

В работе опубликованной в Белграде в 2005 г. я доказал, что последняя группа Вейля изоморфна группе симметрий поверхностив 4-го порядка в 3-мерном проективном пространстве, уравнение которой можно привести к виду aceg = bdfh, где a, b, c, d, e, f, g, h - линейные полиномы, а группа Вейля компактной простой группы Ли класса E_8 изоморфна группе симметрий 2-мерной поверхности в 4-мерном проективном пространстве, уравнение которой можно привести к виду adg = beh = cfi, где a,b, c, d, e, f, g, h, i -линейные полиномы. Эта 2-мерная поверхность обладает 27 прямолинейными образуощими и 108 трисекантами, т.е. прямыми линиями пересекающими эту поверхность в тройках точек. Так как число 27 + 108 = 135 прямых,связанных с этой 2-мерной поверхностью, совпадает с числом прямых линий в 4-мерной плоскости 9-мерного эллиптического пространства, определенном выше, а группы симметрий этих двух конфигураций прямых линий изоморфны между собой, эти конфигурации также совпадают между собой.

Геометрия квазипростых и r-квазипростых групп Ли

Выше я упоминал о связи междо некомпактными простыми группами Ли и симметрическими пространствами с компактной простой группой движений. Эта связь, установленная Картаном в 1929 г., состоит в следующем: если s – инволютивный элемент компактной группы G движений, определяющий симметрическое пространство, то переход от элемента g группы G к элементу sgs является инволютивным автоморфизмом группы G. Этот автоморфизм порождает инволютивный автоморфизм в алгебре Ли A группы G. Этот автоморфизм алгебры Ли A определяет ее представление в виде прямой суммы двух подпространств A=B+C, где пространства B и C таковы, что при этом автоморфизме все векторы подпространства B инвариантны, а все векторы подпространства C умножаются на -1.

Если мы умножим все векторы подпространства C на мнимую единицу i, мы получим алгебру Ли A' некомпактной группы G', имеющей ту же комплексную форму, что и группа G. Алгорит перехода от группы G к группе G' я называю "Картановым алгоритмом". И.М.Гельфанд называет группы G и G' "двойственными по Картану".

Если мы умножим все векторы подпространства C не на мнимую единицу i, а на дуальную единицу e алгебры C_0 дуальных чисел, мы получим алгебру Ли A_0 новой группы G_0, которую И.М.Гельфанд называет "тройственной по Картану" по отношению к группам G и G'.

Когда я читал в Утрехте лекцию об этих группах, Фрейденталь предложил называть эти группы "квазипростыми группами Ли." Поэтому я называю переход от группы G к группе G_0 "квазикартановым алгоритмом".

Квазикартанов алгоритм может быть применен не только к компактным, но и к любым простым группам Ли. Его можно применять и несколько раз, и я называю группу Ли, полученную из простой группы Ли r-кратным применением квазикартанова алгоритма, "r-квазипростой группой Ли".

Понятие простоты, квазипростоты и r-квазипростоты имеют место и для алгебр. Ассоциативная алгебра называется простой, если она не содержит двусторонних идеалов. Как доказал Э.Картан, простыми ассоциативными алгебрами над полем R являются алгебры M(n), CM(n) и HM(n) вещественных, комплексных и кватернионных матриц n -го порядка. В частности, простыми алгебрами являются и сами алгебры C и H. Применяя Картанов алгоритм к алгебрам C и H мы получаем алгебры C' двойных чисел и H' псевдокватернионов. Применяя к этим алгебрам квазикартанов алгоритм, мы получим квазипростые алгебры C_0 дуальных чисел и H_0 полукватернионов.

Проста и альтернативная алгебра O октонионов. Применяя к ней Картанов алгоритм, мы получим простую альтернативную алгебру O' псевдооктонионов, а применяя к алгебре O квазикартанов алгоритм, мы получим квазипростую альтернативную алгебру O_0 полуоктонионов.

Мое внимание к квазипростым алгебрам привлек И.М.Яглом еще в то время, когда я готовил докторскую диссертацию. Позднее он заинтересовал меня вырожденными неевклидовыми геометриями, группами движений которых являются квазипростые и r-квазипростые группы Ли.

Наиболее известными квазипростыми группами Ли являются группы движений евклидова и псевдоевклидовых пространств. Группа движений n-мерного вещественного евклидова пространства является тройственной по Картану по отношению к группам движений n-мерных вещественных эллиптического и гиперболического пространств. Группа движений n-мерного вещественного псевдоевклидова пространства индекса k является тройственной по Картану по отношению к группам движений n-мерных вещественных псевдоэллиптических пространств индексов k и k+1.

Если дополнить n-мерные евклидово и псевдоевклидовы пространства их бесконечно удаленными гиперплоскостями до проективного пространства, гиперсферы евклидова и псевдоевклидовых пространств высекают из этих гиперплоскостей мнимую и вещественную квадрики. Эти квадрики можно рассматривать как абсолюты (n-1)-мерных эллиптического и псевдоэллиптических пространств. Бесконечно удаленные гиперплоскости евклидова и псевдоевклидовых пространств вместе с квадриками, высекаемыми из них гиперсферами этих пространств, называются абсолютами евклидова и псевдоевклидовых пространств.

По принципу двойственности проективного пространства евклидову пространству и псевдоевклидовым пространствам вместе с их абсолютами соответствуют коевклидово пространство и копсевдоевклидовы пространства, т.е. пространства с проективными метриками, абсолютами которых являются мнимый и вещественные гиперконусы второго порядка с точечными вершинами. Расстояния между точками этих пространств, расположенными на прямых, не проходящих через вершину гиперконуса, измеряются как на эллиптических и гиперболических прямых. Расстояния между точками прямых, проходящих через вершину гиперконуса, измерятся как на евклидовых прямых. За расстояния между точками коевклидова и копсевдоевклидовых пространств можно принять в первом случае углы между пересекающимися гиперплоскостями евклидова и псевдоевклидовых пространств, а во втором случае - расстояния между параллельными гиперплоскостями этих пространств.

Евклидово и коевклидово пространства являются частными случаями квазиэллиптического пространства дефекта m. Это пространство также является пространством с проективной метрикой, абсолют которого состоит из мнимого гиперконуса с плоской вершиной размерности n-m-1 и мнимой квадрики в этой плоскости. Расстояния между точками, расположенными на прямых, не пересекающих вершинную плоскость гиперконуса, и на прямых, лежащих в этой вершинной плоскости, измеряются как на эллиптических прямых. Расстояния между точками прямых, пересекающих вершинную плоскость, измеряются как на евклидовых прямых. При $m = 0$ это пространство евклидово, при $m = n-1$ это пространство коевклидово.

Заменяя в определении квазиэллиптического пространства мнимый гиперконус и мнимую квадрику, или одну из этих поверхностей, вещественными, мы получим квазипсевдоэллиптические пространства, частными случаями которых являтся псевдоевклидовы и копсевдоевклидовы пространства.

Группы движений квазиэллиптических и квазипсевдоэллиптических пространств являются квазипростыми группами тройственными по Картану по отношению к группам движений эллиптического и псевдоэллиптического пространств или по отношению к группам движений двух псевдоэллиптических пространств разных индексов.

Вершинные $(n-m-1)$-мерные плоскости гиперконусов абсолютов n-мерных квазиэллиптических и квазипсевдоэллиптических пространств являются $(n-m-1)$-мерными эллиптическими пространствами или содержат $(n-m-1)$-мерное псевдоэллиптическое пространство.

Заменяя эти пространства $(n-m-1)$-мерными квазиэллиптическими или квазипсевдоэллиптическими пространствами, мы получим n-мерные биквазиэллиптические и биквазипсевдоэллиптические пространства. Группы движений этих пространств являются биквазипростыми группами Ли

Повторяя эту операцию $r-1$ раз, мы получим r-квазиэллиптические и r-квазипсевдоэллиптические пространства. Группы движений этих пространств являются r-квазипростыми группами Ли.

Эти пространства были впервые определены Д.М.Ю.Соммервилем в статье “Классификация проективных метрик”. В.Бляшке ввел термин “квазиэллиптическое пространство”, рассматривая 3-мерное пространство этого типа дефекта 1.

И.И.Железина в своей диссертации, которой я руководил, рассматривала это же пространство и 3-мерные квазипсевдоэллиптические пространства того же дефекта.

Мои ученицы Т.Г.Чахленкова и Е.У.Ясинская изучали n-мерные квазиэллиптические, квазипсевдоэллиптические, r-квазиэллиптические и r-квазипсевдоэллиптические пространства.

Важными частными случаями биквазиэллиптических пространств являются изотропные и галилеевы пространства. Мы получим n-мерное изотропное пространство, если заменим в бесконечно удаленной гиперплоскости n-мерного евклидова пространства метрику $(n-1)$-мерного эллиптического пространства метрикой $(n-1)$-мерного коевклидова пространства. Заменяя в той же гиперплоскости метрику эллиптического пространства метрикой $(n-1)$-мерного евклидова пространства мы получим n-мерное галилеево пространство.

Название изотропного пространства объясняется тем, что такими пространствами являются изотропные гиперплоскости псевдоевклидовых пространств индекса 1.

Пространство-время специальной теории относительности является 4-мерным псевдоевклидовым пространством индекса 1. Пространство-время классической механики Галилея - Ньютона является 4-мерным изотропным пространством.

Э.Картан рассматривал 4-мерное изотропное пространство в связи с классической механикой в своей работе "О многообразиях аффинной связности и обобщенной теории относительности". В заметке "Об одном вырождении евклидовой геометрии" Картан изучал дифференциальную геометрию 2-мерной изотропной плоскости.

Геометрии вещественных квазипростых и r-квазипростых групп Ли посвящена 5-я глава моей книги 1969 г.

В работах многих моих учеников рассматривалась дифференциальная геометрия этих пространств. В частности, Н.Е.Марюкова в своей диссертации рассматривала дифференциальную геометрию галилеева пространства, а позже нашла геометрическое истолкование уравнения Клейна-Гордона в 3-мерном галилеевом пространсве, это истолкование было изложено в нашей совместной статье 1997 г.

Квазипростые и r-квазипростые группы Ли могут быть группами движений и в пространствах над алгебрами: квазиэллиптических и квазипсевдоэллиптических, r-квазиэллиптических и r-квазипсевдо-эллиптических пространств над простыми алгебрами, эллиптических и псевдоэллиптических пространств над квазипростыми алгебрами и т.д. Группы движений дуальных пространств тройственны по Картану по отношению к группам движений одноименных комплексных и двойных пространств.

Изоморфизмы между простыми группами Ли определяют изоморфизмы между квазипростыми и биквазипростыми группами, которые также связаны с геометрическими интерпретациями соответственных пространств. Такими интерпретациями являются интерпретация А.П.Котельникова многообразия ориентированных прямых 3-мерного евклидова пространства в виде сферы 3-мерного дуального евклидова пространства и интерпретации Железиной многообразий прямых 3-мерных квазиэллиптического квазипсевдоэллиптического пространств дефекта 1 и галиллеева пространства, соответственно, в виде 2-мерных двойной, комплексной индуальной квадратичных евклидовых плоскостей.

Многие мои ученики изучали геометрии пространств над алгебрами, группами преобразований которых являются квазипростые и r-квазипростые группы Ли.

Глава 2

ВРЕМЕНА И ПИСЬМЕНА

Времена и эпохи

В Советском Союзе история человечества обычно подразделялась на такие эпохи: 1) Первобытное общество, 2) Рабовладельческий строй, 3) Феодализм, 4) Капитализм, 5) Социализм, 6) Коммунизм.

В этой периодизации не вызывали сомнения только первобытное общество, феодализм и капитализм. Рабовладельческий строй явно относился не к тем народам, которые переживали феодализм и капитализм, да и сами рабовладельческие общества были совершенно разных типов: общества типа древнего Египта и Вавилона и общество типа древней Греции. В цивилизациях древнего Востока мелкие царства наиболее древнего периода были очень похожи на мелкие княжества феодальной Европы, а позднейшие крупные империи Древнего Востока напоминали королевства и империи Европы. С другой стороны греческие демократические государства, в которых начинали развиваться товарные отношения, во многом напоминали Европу эпохи начала развития капитализма. Именно близость эпохи Возрождения в Европе и классического периода древней Греции привела Н.А.Морозова к его идее о том, что вся цивилизация древней Греции была создана в эпоху Возрождения.

Что такое социализм, я убедился на собственном опыте жизни в Советском Союзе, наглядно показавшем, что действительность этого строя не имеет ничего общего с тем, что предполагались построить. Хотели построить бесклассовое общество, а получился государственный капитализм с новым правящим классом – “номенклатурой”. Суть “номенклатуры” особенно наглядно проявилась, когда после ликвидации советского социализма номенклатурные чиновники превратили государственною собственность, бывшую в их распоряжении, в свою частную собственность, и стали капиталистами.

Что же касается коммунизма, то, по всей вероятности, попытки реализовать идеи коммунизма могут привести только к “казарменному коммунизму” или к коммунизму, описанному Войновичем в его романе “Москва 2042”.

Поэтому я считаю, что реальных периодов в истории человечества всего три: первобытное общество, феодализм и капитализм.

По этой схеме шло развитие античного общества, прерванное нашествием варваров, по этой схеме шло развитие Европы.

Как происходил переход от одного из этих обществ к другому? Для ответа на этот вопрос мне кажется целесообразным вспомнить о типах человеческой натуры, о которых я писал в главе “Тверская”. По-видимому, различный уровень развития общества давал возможность выдвинуться

людям определенного типа. На каком-то этапе стали выдвигаться “храбрецы” - люди со способностью доводить начатое дело до конца. Эти люди становились племенными вождями, а впоследствии их потомки - феодалами. Когда же созрели условия для торговли, стали выдвигаться “дельцы” - люди со способностью обобщать, так как для обмена необходимо представить себя на месте другого и подсчитать, сколько часов потребовалось бы для изготовления обмениваемого товара. Появление таких людей наглядно показывает фольклор: в русском фольклоре имеются сказки об Иванушке-дурачке, аналогичные сказки имеются и у других народов. Более ранними из сказок этого типа является “Сказка о дураке набитом”. В сказке явно высмеивается способность к обобщениям: “дурак” покупает в городе стол и ставит его на дороге.
“У стола четыре ноги, и у коня четыре ноги, стол сам дойдет до дома” - говорит герой сказки. Позднее появляются сказки другого типа - Иванушка, которого считают дурачком, одерживает ряд побед и в конце концов женится на царевне. Автором такой сказки, несомненно, был торжествующий “делец”.

Роль хеттов в истории Европы

Мой родной русский язык, язык идиш, родной язык моего отца и деда, возникший на основе немецкого языка, и английски язык, на котором говорят мои дети и внуки, являются индоевропейскими языками. К индоевропейским языкам относятся языки большинства народов Европы, а также персидский язык, и языки кинди и урду, на которых говорят народы Индии и Пакистана. Историки считают, что прародина индоевропейских народов находилась между Каспийским морем и Гималаями.

Когда я изучал творчество Аполлония, одного из величайших математиков древности, который родился в Малой Азии, я заинтересовался хеттами, населявшими Малую Азию во II - I тысячелетиях до н.э. Выше мы видели, что Аполлоний был потомком жрецов Аполлона. Так как культ Аполлона греки заимствовали у хеттов, то весьма вероятно, что более далекие предки Аполлония были жрецами хеттского прототипа Аполлона.

Хетты неоднократно упоминаются в библии. Хеттом был полководец царя Давида Урия, вдова которого Вирсавия стала женой царя Давида и матерью царя Соломона. В египетских папирусах упоминались войны хеттов с древними египтянами и женитьбы фараонов на хеттских принцессах.

От хеттов осталось много глиняных табличек с клинописными надписями аналогичными вавилонским. В 1915 г. чешский археолог Бедржих Грозный (1879-1952) расшифровал хеттскую клинопись и обнаружил, что хеттский язык - индоевропейский, похожий на многие языки народов Европы. Например, хетты называли воду словом “вадар“, похожим на русское название воды, на греческое hydor и на английское water, огонь словом “пахxур” похожим на греческое pyr и немецкое Feuer, город словом “гордион” похожим на русское “город” и английское garden, 1-е лицо настоящего времени от глагола “быть” словом “эшми” похожим на словянское “есмь”и латинское “сум”.

Грозный установил, что прототипом Аполлона был хеттский бог Апулунаш , прототипом сестры Аполлона Артемиды была хеттская богиня Уртиму,а прототипом их отца Зевса был хеттский бог - громовержец Завайя.

Во II тысячелетии до н.э. в Малой Азии существовала единая хеттская держава, столица которой находилась восточнее нынешней Анкары. В I тысячелетии до н.э. эта держава распалась на большое число хеттских государств, наиболее известные из которых находились в западной части Малой Азии. Наиболее известны хеттские города Илион в Трое, Пергам в Мезии, Сарды в Лидии, Миры Ликийские в Ликии, Гордион во Фригии и Перга в Памфилии. Война греков с троянцами была описана Гомером в “Илиаде”, царь Лидии Крез славился своим богатством, царь Фригии Гордий завязал знаменитый “Гордиев узел”,который разрубил Александр Македонский.

Во время греко-персидских воин Малая Азия была завоевана персами, которые перенесли свою столицу в Сарды. После победы греков в этой войне хеттские государства превращаются в греческие. Впоследствии эти государства стали провинциями империи Александра Македонского, а затем Римской, Византийской и Оттоманской империй.

В трудах Б.Грозного и других историков и лингвистов, было расшифровано много хеттских слов и установлено их сходство со словами многих живых индоевропейских языков. Однако во всех этих трудах не учитывалось,что хеттский язык существовал задолго до возникновения живых индоевропейских языков Европы. Поэтому следует считать, что индоевропейские языки народов Европы произошли от языков различных хеттских племен, которые попали в Европу на рубеже II и I тысячелетий до н.э. во время массового переселения хеттов с востока на запад. Весьма возможно, что предки литовцев пришли из Лидии, предки римлян, живших в Лациуме, пришли из Ликии, предки фризов пришли из Фригии, а предками готов были геты.

Хеттские слова мужского рода оканчивались на -аш, -уш , -иш, что связано с тем, что слова мужского рода на древнейших языках Европы оканчивались на -as, -os, -us, -es, -is. Я упоминал. что окончания -ос, -ус, -ис имелись и в старославянском языке.

Название родного города Аполлония Перга первоначально означало скалу или гору, слово “перга” в этом смысле было родственно немецкому слову Berg. Со словом “перга” было связано название “пергунаш” бога - громовержца “разрушителя скал”, от которого, несомненно, произошли имена словянского Перуна и литовского Пяркунаса. Название государства Pamphylia, в котором находилась Перга, - греческое, означающее “принадлежащая всем племенам”. Поэтому ясно,что в Перге находились святилища хеттских богов Завайи, Апулунаша и Уртиму. После того, как Памфилия стала греческим государством, святилища Зевса и Аполлона были перенесены в Олимпию и Дельфы, а святилища Артемиды осталось в Перге. Геродот в своей "Истории" сообщал, что хеттские цари посылали богатые дары в святилище Аполлона. Так как в IV в. до н.э., когда жил Геродот, это святилище находилось в Дельфах, Геродот полагал, что дары посылались в Дельфы, но на самом деле дары посылались в Пергу. В это время слово "перга"стало обозначать башню или замок. Это название родственное греческому слову pyrgos и немецкому Burg, вошло в состав названия города "Пергама"; "пергамом" назывался также кремль в Илионе, взятие которого греками описано Гомером в "Илиаде".

От названия хеттского племени лувиев или румиев произошли названия Византийской империи "Ромея" и "Восточно-Римская империя", арабское название "ар-Рум" Византии и Турции, названия города Рима, Римской империи, итальянской Романьи и балканской Румынии, и слова "ром" и "ромэн", которыми называют себя цыгане, проходившие из Индии в Европу через Малую Азию.

Роль скифов в истории Европы

Предки индоевропейских народов могли попасть из своей прародины в Европу не только через Малую Азию, но и по северному берегу Черного моря. В древности здесь жили скифы, принадлежавшие к иранской группе индоевропейских народов. От скифского слова "дон" - "река" происходят названия рек Дон, Донец, Днепр, Днестр и Дунай. Столица Скифии, упоминаемая в "Географии" Птолемея, находилась на берегу Днепра, по-видимому в районе города Чигирин , одно время считавшегося главным городом Малоросии .

Когда в Северное Причерноморье пришли славяне, они смешались с потомками скифов. По-видимому, этим объясняется сходство слова "Бог" в русском и других славянских языках с древнеперсидским словом "баг", которое вошло в название города Багдада, основанного персами, и означавшее "Богом данный", и в слово "багпур" - "сын Бога", которым персы переводили титул императора Китая.

Потомками скифов являются осетины, которые называют свои реки Ардон, Гизельдон и т.д. Одно из названий осетин "аланы" близко к названию родственных скифам алванов, о которых я писал в главе "Баку". Несомненно, что потомками скифов являются и албанцы, которые называют себя shqip. Слово "Албания" близко к названиям алванов и алан, а название shqip - к слову "скиф". Несомненно, что в птолемеевском названии "Столица Скифии" первое слово является переводом скифского слова, означающего столицу и похожее на названия столиц Тегеран и Тирана, откуда видно, что название Чигирин происходит от названия скифов.

Слово "дон" входит в название Македонии. Поэтому возможно, что македонцы были потомками скифов, аназвание этой реки Вардар первоначально звучало Македон и означало "Мать - река".

Роль шумеров и дравидов в истории Азии

В моей книге об Ибн ал-Хайсаме я обратил внимание на то, что все скульптурные изображения людей у шумеров, которые жили в той части Ирака, где родился Ибн ал-Хаисам, были черного цвета, из чего я сделал вывод, что шумеры были чернокожими.

Государство шумеров с главным городом Ур возникло на юге Ирака в IV тысячелетии до нашей эры Цивилизация шумеров оказала исключительное влияние на многие народы Азии. Шумеры изобрели клинопись, которой впоследствии пользовались вавилоняне, хетты, древние персы и предки армян урарты. Среди шумеерских клинописных табличек имелись математические, изучавшиеся в книге А.А.Ваймана "Шумеро-вавилонская математика". Шумеры занимались также астрономическими наблюдениями.

В III тысячелетии до нашей эры государство шумеров было завоевано аккадянами родственными арабам и евреям. Аккадяне и шумеры образовали единое государство со столицей в Вавилоне, которое стало одним из центров мировой культуры

Чернокожими были также дравиды, которые жили в Индии до прихода туда ариев. В III тысячелетии до нашей эры дравиды основали в долине реки Инд государство с высоким уровнем цивилизации. Это государство было завоевано спустившимися с Гималаев ариями родственными персам. Арии усвоили культуру дравидов и основали государство, которое также стало одним из центров мировой культуры.

Родственные дравидам племена жили в южной части Индокитая. Одно из этих племен - кхмеры имело много общего с шумерами, в частности нумерация обоих народов была пятеричной. Несомненно, что шумеры и дравиды также были родственны между собой. Нумерация современных дравидских племен десятеричная, несомненно под влиянием нумерации ариев. По-видимому цивилизация родственных дравидам племен Индокитая оказала влияние и на Китай, где также возник центр мировой культуры.

Возникновение классической цивилизации древнего Египта также можно объяснить влиянием негретянских народов верховьев Нила.

Тайна Атлантиды и басков

Кроме потомков хеттов и скифов в Европу могли попасть потомки и неиндоевропейских народов, например, народа хаска, который населял Малую Азию до прихода хеттов. Хаска были родственны черкесам, которых славяне называли косогами. Возможно, что потомками хаска был народ Атлантиды. Сообщение Платона об Атлантиде были основаны на рассказах его деда Солона, который получил их от древнеегипетских жрецов и сам видел папирусы, содержащие эти сообщения. Согласно Платону Атлантида существовала за 9000 лет до того, как были написаны папирусы о ней, и имела такие большие размеры, что не могла находиться в Средиземном море, вследствие чего считалось, что она находилась в Атлантическом океане. Греческий геолог Герос доказал, что все числа, приведенные Платоном, увеличены в 10 раз, так как Солон принимал египетский иероглиф, обозначающий 100, за знак 1000. Поэтому на самом деле Атлантида существовала в Средиземном море за 900 лет до составления папирусов о ней и погибла при стихийном бедствии, описанном в вавилонских легендах и в Библии как “всемирный потоп”. От Атлантиды остался существующий ныне остров Санторин.

Греческое название Атлантиды Atlantis содержит сочетание “тл”, которое в черкесском и родственных ему языках означает специфический щелкающий звук (этим звуком начинается фамилия упомянутого Тлупова). Поэтому возможно, что народ Атлантиды был потомком народа хаска.

Геолог А.М.Городницкий тщательно обследовавший дно Атлантического океана убедился, что все выступы на этом дне имеют вулканическое происхождение.

Нумерация черкесов, как грузин и других народов Кавказа двадцатеричная, такова же нумерация народа басков, которые живут на северо-западе Испании и юго-западе Франции. Н.Я.Марр на основании сходства античного названия басков “иберы” и птолемеевского названия грузин “иверы” решил, что баски родственны грузинам. На самом деле баские числительные не похожи на грузинские. Басское название 1 ika похоже на санскритское “эка”, название 2 bi похоже на латинское bis. Название 3 iru похоже на армянское “эрек” название 4 lau похоже на черкесское “пле”, т.е. числительные басков похожи на числительные идоевропейских народов и народа хаска, которые пришли из Малой Азии.

Название североафриканской страны Ливии близко к названию хеттского племени лувиев, а название Атласских гор на северо-западе Африки содержит тот же звук “тл” что и Атлантида. Возможно, что предки басков переправились на Пиринейский полуостров из Африки.

Связь грузин с различными народами Азии

Действие классической грузинской поэмы Шота Руставели “Витязь в тигровой шкуре”начинается в “Аравии счастливой”и происходит во многих странах Южной Азии. В основе этой поэмы - персидские легенды, имя одной из героинь поэмы Нестан Дареджан - искажение персидского выражения “Нист ан дар джахан” - “нет такой в мире”.

Я сравнивал название планет в русском переводе и в грузинском тексте этой поэмы. Название всех планет в этой поэме, кроме Венеры, - арабские, название Венеры Аспирози искажение греческого названия Hesperos название Венеры видимой вечером. В Тбилиси мне показали грузинский перевод астрономических таблиц Улугбека с персидского, выполненный царем Вахтангом.

Грузинские числительные от 1 до 10 эрти, ори, сами, отхи, хути, экви, швиди, рва, цхра, ати похожи на китайские названия этих чисел и, эр, сань, сы, у, лю, ци, ба, цзю, ши. Из этого и из того, что в грузинском языке имеются звуки похожие на китайские "цз" и "чж" можно заключить, что предки грузин жили гораздо восточнее современной Грузии и находились в контакте с китайцами, а впоследствии переселились в Закавказье.

Сходство различных языков

В приведенных мной примерах родственных слов индоевропейских языков рассматривались только слова родственные хеттским и скифским. Еще больше примеров такого сходства можно найти для тех слов хеттские и скифские аналоги которых неизвестны. Особенно наглядно это сходство видно на числительных. Приведем название чисел от 1 до 10 на греческом, латинском, персидском и санскритском,языках:

один – eis, unus, як, эка,
два – dyo, duo, ду, дви,
три – tres, tres, се, трай,
четыре – tessara, quattuor, чахар, чатур,
пять – pente, quinque, пандж, панча,
шесть – hexa, sex, шаш , шаша,
семь – hepta, septem, hафт, сапта.
восемь – okto, octo, hашт, ашта,
девять – ennea, novem, ну, нава,
десять – deka, decem, дah, даша.

Английское слово bad и персидское слово бад, означающее "плохой", родственны русским словам "беда" и "бедный".

Русское слово "стерва", первоначально означавшее дохлую лошадь , роственно немецкому слову sterben – "умирать".

Руское слово "смерть" родственно немецкому Schmerz – "боль" и английскому smart – "сильная боль, шок".

Русское слово "око" родственно латинскому oculus и немецкому Auge, имеющим то же значение.

Латинское слово aqua – "вода" родственно румынскому apa и персидскому аб, имеющим то же значение.

Русское слово "огонь" родственно латинскому ignis и литовскому ugnis, имеющим то же значение.

Латинское augustus – "высочайший" родственно литовскому aukstakas– "верхний".

Русские глаголы "быть" и "бить" родственны английским словам be и bit, имеющим те же значения .

Латышские названия белого, коричневого, черного и красного цветов balts, bruns, melnais, sarkans родственны, соответственно, русскому слову "белый", немецкому braun, греческому melanis и персидскому сарх.

Сравнение числительных семитических языков – иврита, арабского, арамейского, эфиопского и аккадского указывает на близость этих языков.

Аналогичным образом устанавливается близость финского, эстонского, мордовского, удмурдского, марийского и коми-зырянского языков, венгерского и ханты-мансийского языков, турецкого, татарского, узбекского и других тюрских языков, а также манчжурского и тунгузского языков.

Языковые заимствования

Я упоминал, что язык моих предков идиш возник на основе немецкого языка. По той же причине язык "ладино" евреев Северной Африки возник на основе испанского языка, а языки бухарских евреев и татов возникли на основе персидского языка. Были и другие случаи, когда некоторые народы усваивали языки других народов. Заметим, что числительные в монгольском языке, который родственен тюрским языкам, были заимствованы у тибетцев вместе с религией буддизма.

Когда я работал в Баку, я как-то спросил у Хасана Зарине-зада, иранского азербайджанца, который учил меня арабскому языку, как в Иране отличают туркмен от азербайджанцев, которые понимают друг друга. "Очень просто, - ответил он, - мы белые, а они желтые, у нас глаза прямые, а у них косые". Тем самым он подтвердил, что, несмотря на то, что оба народа говорят на тюркских языках, этнически азербайджанцы - не тюрки, а индоевропейцы, потомки мидян и албанов.

Еще сложнее происхождение турок: на территории современной Турции жили хетты, греки и армяне, но после завоевания Малой Азии турками - османами ее жители стали говорить на турецком языке, но этнически большинство современных турок остались индоевропейцами.

Такие же смешения народов происходили и в Европе. В Восточной Германии названия большинства городов, начиная с Берлина, Дрездена и Лейпцига - слегка видоизмененные славянские слова. Первоначально на месте этих городов были славянские селениями Барлино, Дрезно и Липско. Название Померании (Pommern) происходит от славянского племени поморов.Бранденбург первоначально назывался Брани Бор (защитный лес). Название Пруссии происходит от литовского племени пруссов.

Французский язык происходит от латинского языка римских солдат, название французов - от германского племени франков, а сами французы - потомки кельтского племени галлов.

Английский язык происходит от языка германских племен англов и саксов. Этот язык подвергся сильному влиянию французского языка норманов, завоевателей которые пришли из Нормандии. Сами англичане - потомки кельтского племени бриттов.

Весьма интересен язык эстонцев, заимствовавших многие слова у своих соседей - русских и немцев: rist -"крест", nuut -"кнут", kurb -"скорбь", tusk - "тоска", kool -"школа", raamat - " книга"(от слова "грамота"), jaam - "станция"(от старинного слова "ям", сохранившегося в слове" ямщик"); pilt -"картина" (Bild), arst -"врач" (Arzt), loss - "замок" (Schloss), tool -"стул"

(Stuhl), rant – “пляж” (Strand), kirk – “церковь” (Kirche). При заимствовании иноязычных слов, начинающихся на несколько согласных звуков, эстонцы оставляли только последние из них. Предки эстонцев жили на территории нынешней Центральной России, их русское название “чудь” сохранилось в названии Чудского озера. Большая их часть обрусела, а часть дошла до Балтийского моря, где в то время жили родственные литовцам айсты и, смешавшись с ними, стали называться Eesti. Слово “айсты” сохранилось в литовском названии Кенигсбергской косы Aisciu Neringa (ее немецкое название Frische Nehrung). Об этом свидетельствует и то, что многие эстонские слова, относящиеся к мореплаванию и рыболовству, заимствованы у литовцев: laev –”корабль“ от литовского laivas, puri –”парус“ от литовского bure.

Многие научные термины различных языков заимствованы из греческого и латинского. Некоторые названия музыкальных инструментов и фруктов народы Европы взяли из восточных языков.

Французское и английское слово assasin – “убийца” произошло от персидского слова һашишин – так крестоносцы называли мусульманских террористов, которые действовали в состоянии опьянения гашишом.

Немецкое слово Kamerad, французское camarade и английское comrade, означающее “товарищ”, происходят от итальянского camerato – ”живущий в той же комнате”. Грузинское слово амханаги, также означающее “товарищ”, происходит от персидского слова һамханаки – “живущий в том же доме”.

Особенности русского языка

Русский язык – один из славянских языков. Пушкин писал:
Славянские ручьи сольются ль в русском море,
Оно ль иссякнет – вот вопрос.
В отличие от всех других славянских языков русский язык обладает сингармонизмом , о котором я писал в главе “Ташкент и Ашхабад”. Несомненно, что этот сингармонизм является влиянием тюрков и угрофиннов, языки которых обладают сингармонизмом.

В течение многих веков русские общались с различными тюркскими народами от половцев до казанских и крымских татар, а также с угрофинскими племенами, языки которых обладают сингармонизмом. Многие русские дворянские роды происходят от татарских князей, например, Тимирязевы от Темир-гази, Бибиковы от Биби-хана, Хебышевы от Чабыша, Чаликовы от Чалыша, или от турок, как Тургеневы, многие русские являются потомками представителей финских и угорских племен.

Выше я писал, что названия многих рек северного Причерноморья имеют скифское происхожвение. Название многих рек центральной России имеют финское происхождение: Волга – от слова valge – “белая”, Мста – от слова musta – “черная”, Ока – от слова joki – “река”, Москва река – mustvee – “черная вода”.

Ал-Бируни (973-1048) указывал, что севернее седьмого "климата " между Уралом и Балтийским морем живут народы "ису" и "юра". Ясно, что "ису" - финское племя "весь", а "юра" - угры, которые шли с Урала к территории нынешней Венгрии. На языке живущих в настоящее время за Уралом народов ханты и нанси ухо называется "пель" а по-венгерски - fil; слово "пель" вошло в состав русского слова "пельмени", которое на языке народов ханты и нанси означает "ухо-хлеб".

Русское слово "чемодан" произошло от персидского слова джамидан - "ящик для платьев". Слово "киоск"- от персидского слова кушк - "башня", пришедшего к нам через турецкое kosk и французское kyosque. Слово "фарфор" произошло от персидского слова багпур, которым персы называли китайского императора, обладавшего монополией на продажу фарфора. Русское слово "халат" произошло от арабского слова хилат - "рубаха", слово "сундук"- от арабского слова, означающего ящик. Слово "танк"произошло от индийского слова, означающего пруд, которым англичане называли металлические баки,а также изобретенные ими танки.Русское слово "миска" произошло от татарского слова мис - "медь", "лошадь"- от татарских слов лош и ат, означающих одну из конских пород, "очаг"- от татарских слов от и джаг, означающих "место огня", "кулак" - от татарского слова кул - "рука".

Письмена и алфавиты

В детстве я коллекционировал алфавиты. С тех пор помню греческий и еврейский алфавиты.

Когда Зарине-зад учил меня арабскому языку и объяснил мне числовые значения арабских букв, он удивился, что я моментально их запомнил. На самом деле в этом не было ничего удивительного: арабский алфавит произошел из финикийского в котором порядок букв и их числовые значения были такими же, как в еврейском. Арабы изменили порядок букв и сократили их названия, но сохранили их числовые значения. Значение 1 имеют еврейский алеф и арабский алиф, 2 - бет и ба, 3 - гимел и джим, 4 - далед и даль, 5 - hей и hа, 6 - вов и вав, 7 - заин и за, 8 - хет и hа, 9 - тет и та, 10 - йуд и йа, 20 - каф и кяф, 30 - ламед и лям, 40 - мем и мим, 50 - нун и нун, 60 - самех и син, 70 - ‘айн и ‘айн, 80 - пей и фа, 90 - цаде и сад, 100 - коф и каф, 200 - реш и ра, 300 - син и шин, 400 - тов и та. На этом еврейский алфавит заканчивается и дальнейшие сотни евреи обозначают комбинациями букв, сумма значений которых равна этим сотням. Арабы обозначают сотни от 500 до 900 и 1000 буквами, которые они добавили к финикийскому алфавиту. О числовых значениях арабских букв я упоминал, когда писал о труде халифа Али.

Замечу, что слово шана -"год" на иврите обозначается тремя буквами с числовыми значениями 300, 50 и 5, сумма которых 355 равна числу дней лунного года, который лежит в основе еврейского календаря.

Название каждой буквы в финикийском алфавите было словом начинающимся с этой буквы, а сама буква была изображением предмета, называемого этим словом. Например, буква алеф имела вид перевернутой буквы A, а ее название обозначало голову быка, слово бет обозначало дом и буква бет имела вид прямоугольника с отверстием в середине нижней горизонтальной стороны.

Греки заимствовали свой алфавит у финикиян. Названия греческих букв –видоизмененные финикийские. К 22 финикийским буквам греки добавили 5 букв U, F, C, Y, W и получили 27 букв, необходимых для обозначения всех единиц, десятков и сотен. В первоначальном греческом алфавите были буквы "вау", "коппа" и "саби", соответствующие финикийским "ваву", "кофу" и "цаде". Так как у греков не было звука "ц" буква саби не применялась в письме, ее перенесли в конец алфавита и использовали только для обозначения числа 900. Коппа получила числовое значение 90, а буквы R, S, T, U, F, C, Y, W получили числовые значения от 100 до 800.

В византийскую эпоху буква b называлась не "бета", а "вита" и произносилась как "в", а звук "б" обозначался буквами mp , поэтому букву саби часто называют "сампи".

Буквы "вау" и "коппа" применялись еще в то время, когда на основе греческого алфавита был создан латинский алфавит и от этих двух букв произошли латинские буквы F и Q. Впоследствии вау и коппа перестали применяться в письме, но продолжали использоваться для обозначения чисел 6 и 90, причем в этом случае вау обычно записывалась в виде V.

Числовые значения греческх букв применялись Птолемей в "Алмагесте". В частности, он обозначал этими буквами цифры от 1 до 59 в шестидесятеричных дробях. Для нуля в этих дробях использовалась буква o (числовое значение которой было 70) с черточкой над буквой, возможно, что эта буква была выбрана как первая буква слова ouden – "ничто".

Римляне заимствовали латинский алфавит у греков, большое количество которых жило в Италии, но букву Г превратили в C, которую первоначально произносили как к, превратили Z в G, Y – V, которую произносили и как v и как u, букву I произносили и как i и как j , букву H произносили как h.

Кирилл и Мефодий за основу славянского алфавита "кириллицы" взяли греческий алфавит, оставив числовые значения греческих букв.

Для обозначения звуков, которых не было в греческом языке в ту эпоху, Кирилл и Мефодий добавили новые буквы Б, Ж и многие другие, которые не имели числовых значений. Добавленные буквы Ш и Ц были взяты из еврейского алфавита. Числовыми значениями 6, 90 и 900 обладали буквы S, Ч и Ц. Для обозначения звука Ж, отсутствующего в греческом и в еврейском языках, Кирилл и Мефодий , следуя финикиянам, изобразили жука.

Возможно, что Ъ произошел от буквы, обозначавшей ноль.

Названиями букв кириллицы были славянские слова "аз", "буки", "веди", "глаголь", "добро" и т. д.

На основе греческого алфавита армянский просветитель Месроп Маштоц создал армянский, грузинский и албанский алфавиты, но в них было добавлено много новых букв, и числовые значения букв в этих алфавитах были не от 1 до 900, а от 1 до 9000.

Русская орфография

Я много размышлял о русской орфографии и хочу сделать некоторые замечания по этому вопросу.

Современная русская орфография далеко не так консервативна, как английская, но и в ней имеются формы, соотвествующие произношению давно минувших времен, например, окончания -ого и -его и слово "сегодня", в котором буква г произносится как "в".

Буква Ы состоит из мягкого знака и буквы I, которая произносилась как "и". Однако слово "сыграть" показывает, что на самом деле буква Ы состоит из твердого знака и буквы, обозначающей "и". Поэтому по аналогии с другими гласными буквами следовало заменить букву Ы буквой I, которая в начале слогов читалась бы как "и", а после твердой согласной - как "ы", а буква И в начале слогов читалась как "йи", а после мягкой согласной как "и".

В русском языке имеются два вида буквы "е": один из них под ударением произносится как "е"только перед мягкой согласной, а перед твердой согласной произнисится как "йо" например ель - елка, сельский - села; другой вид буквы "е" произносится как "е" в обоих случаях.

В дореволюционной орфографии звук "е" во втором случае обозначался буквой "ять". Следуя примеру литовцев, которые буквой е обозначают звук "я", а звук "е" обозначают буквой е с точкой под ней, следовало бы и нам к букве е во втором случае добавить точку под ней.

В русском языке окончания прилагательных -ый, -ий никогда не бывают под ударением, под ударением бывают только окончания -ой, -ей (окончание -ей имеется только в словах "сей" и "чей").Поэтому следовало бы писать во всех случаях -ой, -ей и, в частности, вместо -кий писать -кой. Однако вследствие традиции, оканчание -кой произносят только некоторые артисты, а большинство русских говорят -кий.

История науки

Я начал заниматься историей науки в Баку, когда мне поручили читать курс истории математики.

Мои первые работы по истории науки относились к ат-Туси и к другим математикам мусульманского средневековья. После возвращения в Москву я стал изучать творчество математиков и других ученых древности, эпохи Возрождения и XVI - XX веков.

Начну с изложения моих мыслей о древнегреческих ученых.

Фалес

Первым ученым Древней Греции считается Фалес (VI в. до н.э.) один из “семи греческих мудрецов”. Фалес, как и многие греческие философы того времени, был гилозоистом, т.е. считал все материальное живым. Слово “гилозоисты” происходит от греческих слов hyle – материя и zoe – жизнь. Потомок финикийских мореходов, Фалес считал началом всего воду.

Когда я редактировал книгу Э.Я.Кольмана “История математики в древности”, я увидел, что Кольман написал: “Фалесу приписывают доказательство первых геометрических теорем, но во времена Фалеса еще не было геометрических аксиом, и поэтому никаких теорем Фалес доказывать не мог”. Я убедил Кольмана, что аксиомы могли появиться только после попыток доказательства теорем, а о том, что представляли собой доказательства Фалеса, видно из формулировок его теорем: “Диаметр делит круг пополам”, “В равнобедренном треугольнике углы при основамии равны”, “Вертикальные углы равны”, “Два треугольника равны, если сторона и примыкающие к ней углы одного треугольника равны стороне и примыкающим к ней углам другого треугольника”,“Треугольник, вписанный в полукруг, – прямоугольный”.

Ясно, что первые три теоремы Фалес доказывал перегибанием чертежа, а 4-ю – наложением одного треугольника на другой, 5-ю теорему также можно доказать, дополняя прямоугольный треугольник до прямоугольника и перегибая полученный чертеж по осям симметрии прямоугольника.

Фалес был и астрономом, ему приписывают первое предсказание затмения.

Другие гилозоисты считали началом всего, не воду, а другие греческие элементы. Анаксимен и Диоген считали началом всего воздух, Гераклит, учившийся у персидских огнепоклонников, – огонь. Анаксимандр, ученик Фалеса и учитель Анаксимена, считал началом всего “неопределенное”.

Пифагор и Демокрит

Крупными древнегреческими математиками V в. до н.э. были Пифагор и Демокрит.

В предыдущей главе я цитировал строки стихотворения В.Я.Брюсова

С Пифагором слушай сфер сонаты,
Атомам дли счет, как Демокрит.

Но Пифагор был не только автором астрономической теории, согласно которой небесные сферы, несущие планеты, издают при своем вращении гармоничные звуки. Пифагор был великим математиком, имя которого носит знаменитая теорема, основателем одного вида математического атомизма и геометрической алгебры.

Демокрит был не только основоположником учения о физических атомах, но и основателем другого вида математического атомизма, оказавшего значительное влияние на дальнейшее развитие античной математики и, в частности, на Евклида. Демокритовскому математическому атомизму была посвящена книга С.Я.Лурье “Теория бесконечно малых у древних атомистов”.

Проблемы математического атомизма у его основателей и их средневековых последователей неоднократно были предметом моих статей и докладов. Математические атомисты считали, что пространство в целом и геометрические фигуры являются не геометрическими местами, как считал Аристотель, а множествами точек, причем конечные образы пространства и геометрические фигуры состоят из конечного числа точек. Пифагорейцы считали, что точки не имеют размеров, а геометрические величины создаются расстояниями между точками. Демокрит же считал, что атомы пространства, принципиально неделимы и имеют конечные, хотя и очень малые размеры.

Пифагор отождествлял точки с единицами и представлял числа в виде геометрических фигур, числа точек в этих фигурах получили название “фигурных чисел”. Частными случаями таких чисел являются квадратные и кубические числа, названия которых сохранились до настоящего времени. Изображая квадратные числа в виде квадратов, пифагорейцы называли корни из этих чисел сторонами или основаниями.

В V веке н.э. индийские астрономы перевели слово basis “основание” словом “пада”, означающим основание стены и корень дерева. В VIII веке арабские математики перевели слово “пада” словом “джизр” – корень. В XII веке европейские математики перевели слово “джизр” латинским словом radix, которое впоследствии было переведено на живые европейские языки словами, означающими корень. Так появились термины современной математики “корень” и “радикал.”

Пифагорейцы называли произведения двух и трех чисел, соответственно, плоскими и телесными числами и изображали их прямоугольниками и параллелепипедами, что и привело к геометрической алгебре.

Так как Пифагор был одним из творцов геометрической алгебры, я считаю, что его доказательство “теоремы Пифагора” было таким. Рассматривая прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, Пифагор строил квадрат на гипотенузе и с внешней стороны этого квадрата пристраивал к нему треугольники равные данному. Получался большой квадрат со сторонами a+b. Так как площадь данного треугольника равна ab/2, то площадь большого квадрата равна c^2+2ab. С другой стороны, так как большой квадрат можно разделить на два квадрата со сторонами a и b, и два прямоугольника, его площадь в силу известной теоремы геометрической алгебры равна $a^2 + 2ab + b^2$. Из равенства $c^2+2ab=a^2+2ab+b^2$ вытекает равенство $c^2= a^2+b^2$.

Пифагорейцы определили простые числа, которые нельзя представить в виде произведений, совершенные числа, равные суммам своих делителей, и дружественные числа – пара чисел, каждое из которых равно сумме делителей другого числа.

В отличие от гилозоистов, которые считали началом всего те или иные материальные элементы, пифагорейцы считали началом всего абстрактное понятие - число, и объясняли все закономерности мира отношениями натуральных чисел.

Платон

После открытия пифагорейцами несоизмеримых отрезков, отношения которых не являются отношениями натуральных чисел, их школа потерпела крах. Ей на смену пришла школа Платона (427-347 до н.э.),который заменил арифметику в объяснении закономерностей мира геометрией. Платон написал на дверях своей Академии “Да не войдет сюда необученный геометрии”. Платон значительно способствовал развитию математики, его ученики Евдокс и Теэтет были крупными математиками.

Платон не любил Демокрита, скупал рукописи его сочинений и сжигал их.

Аристотель

Занимался математикой и Аристотель (384-322 до н.э.) В своей “Физике” Аристотель дал определения непрерывности и бесконечности и сформулировал принцип: “Непрерывная величина не может состоять из неделимых частей, например, линия из точек”. Аристотель считал, что непрерывная величина может быть только “геометрическим местом” в котором находятся точки. В “Первой Аналитике” Аристотель разработал теорию силлогизмов , а “Во второй Аналитике”- теорию доказательств.

По мнению Аристотеля мир состоит из трех областей :

1) подлунного мира - от центра Земли до орбиты Луны, в котором действуют законы обычной физики,

2) надлунного мира - от орбиты Луны до сферы неподвижных звезд, в котором возможно движение только с постоянной скоростью и по идеальным линиям - прямым и окружнастям,

3) области за сферой неподвижных звезд , в которой живут боги.

Аристотель называл эти области областью физики, областью математики и областью божественной науки.

В обнаруженном мной в Баку математическом трактате Омара Хайяма приведены пять ”принципов, заимствованных у Философа”, 4 из которых являются известными утверждениями Аристотеля, откуда видно, что Философом Хайям называл Аристотеля. Тот из этих принципов, который отсутствует в известных нам сочинениях Аристотеля, гласит: “Две сходящиеся прямые линии пересекаются и невозможно, чтобы две сходящиеся прямые расходились в направлении схождения”. Этот принцип, равносильный V постулату Евклида, по-видимому, был сформулирован Аристотелем в одном из его сочинений, которое не сохранилось.

` Во “Второй Аналитике” Аристотель указывал, что те, кто писал о параллельных линиях, совершали логическую ошибку “постулирование основания”, т.е. неявно предполагали выполненным утверждение равносильное доказываемому. Отсюда ясно,что “принцип Философа” равносильный V постулату Евклида, был сформулирован Аристотелем в результате анализа того, что писали его предшественники о параллельных линиях. Утверждениям о параллельных линиях в других сочинениях Аристотеля посвящена статья Имре Тота “Теория параллельных у Аристотеля”,

Во многих трудах Аристотеля цитируются недошедшие до нас сочинения Пифагора и Демокрита.

Евклид

Евклид (ок. 365 – ок.300 до н.э.) в своих “Началах” подвел итог античной элементарной геометрии и теории чисел. Когда Евклид закончил работу над этой книгой, он преподнес один экземпляр египетскому царю Птолемею I, в столице которого Александрии он работал. Царь перелистал книгу с непонятными для него чертежами и спросил Евклида: “Нет ли более короткого пути в науку, хотя бы для царя?”. “Нет, – ответил Евклид, – нет царского пути в науку”.

В Советском Союзе были очень популярны слова Маркса из его предисловия к французскому изданию “Капитала”. Эти слова печатались на обложках тетрадей и были написаны на многих плакатах, висевших во всех школах и вузах : “К науке не ведет широкая столбовая дорога, и только тот может расчитывать достичь ее сияющих вершин, кто, не страшась трудов, карабкается по ее каменистым тропам”. Перевод этот был сделан В.И.Лениным в одной из его статей. Во французском оригинале предисловия Маркса первые слова этого отрывка звучат так: “Il n’y a pas le roite royal pour la science”, – “Нет царского пути в науку”, т.е. Маркс процитировал слова Евклида. Ленин не знал этих слов Евклида и он перевел слова “царский путь“ как “королевскую дорогу”, которую он считал “широкой столбовой дорогой ”.

Б.Л..Ван дер Варден доказал, что 13 книг “Начал” Евклида являются обработками сочинений греческих математиков IV века до н.э. На основе сочинений Гиппократа Хиосского составлены I книга об основах планиметрии, II книга о геометрической алгебре, III книга о кругах, IV книга о правильных многоугольниках и XI книга об основах стереометрии. На основе сочинений Евдокса составлены V книга о теории отношений геометрических величин, VI книга о подобии плоских фигур и XII книга о площадях и объемах .На основе сочинений пифагорейцев составлены VII–IX книги о теории чисел На основе сочинений Теэтета составлены X книга о квадратичных иррациональностях и XIII книга о правильних многогранниках.

Сочинение Гиппократа восходит к недошедшему до нас математическому сочинению Демокрита. Явно демокритовский характер носит I определение “Начал” - “Точка - то, что не имеет частей”.

Однако в целом книга Евклида основана на математических принципах Аристотеля и содержит теорему о том, что любой отрезок может быть разделен пополам. По-видимому, восходит к принципу Аристотеля и V постулат Евклида.

“Оптика” Евклида была основана на представлении о зрительных лучах, выходящих из глаза и “ощупывающих” видимые предметы. Само слово “оптика” происходит от греческого слова opsis - “зрительный луч”. Сравнивая “Оптику” и “Начала” Евклида я убедился, что “Оптика” основана не на учении Аристотеля, а на учении Демокрита.

Архимед

Величайшим ученым древности являлся Архимед (ок. 290-212 до н.э.) он был и математиком и механиком и физиком и инженером. Я рассматривал многие сочинения Архимеда. Если Евклид для круглых фигур и тел определял только отношения их площадей и объемов, Архимед нашел площадь круга, объем шара и объемы других круглых тел. Архимед также определил площадь сегмента параболы и решил ряд других задач, которые в настоящее время решаются с помощью интегрального и дифференциального исчислений. Я рассмотрел в книге Архимеда “Леммы” задачу об арбелоне, т.е. фигуре, полученной из полукруга с диаметром a+b удалением из него двух полукругов с диаметрами a и b, которые являются отрезками диаметра большего полукруга. Архимед нашел, что площадь арбелона равна площади круга, диаметром которого является перпендикуляр восставленный к диаметру большего полукруга в точке касания малых полукругов. Я доказал, что эта задача равносильна теореме геометрической алгебры о разбиении квадрата со стороной a+b на два квадрата с площадями a^2 и b^2 и два прямоугольника с площадями ab , так как площади полукругов равны, соответственно, $\pi(a+b)^2/8$, $\pi a^2/8$ и $\pi b^2/8$, а площадь круга равного арбелону равна $\pi ab/4$. Во время осады римлянами Сиракуз, где жил Архимед, он был душей обороны города и его технические ухищрения наводили ужас на римлян. В частности, Архимед сжигал корабли римлян, выстраивая солдат с медными щитами таким образом, что их щиты образовывали часть поверхностьи параболоида вращения, ось которого была направлена на Солнце, а фокус был в том месте, где находился римский корабль. Недавно греческий инженер Иоаннис Сакас воспроизвел сожжение корабля по методу Архимеда. Сожжение римских кораблей показывает, что Архимеду были известны фокальные свойства параболы и параболоида вращения.

На могиле Архимеда в Сиракузах был поставлен камень, на котором выгравировано изображение цилиндра с вписанными в него конусом и шаром. Этот чертеж относится к одному из самых замечательных математических достижений Архимеда - выводу формулы объема шара. В своем послании к Эратосфену Архимед рассматривал прямой круговой цилиндр, высота которого равна радиусу его основания. Обозначим диаметр шара буквой D. В цилиндр вписаны прямой круговой конус, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра, а вершина - с центром A его верхнего основания, и шар, полюсы которого совпадают с центрами A и B верхнего и нижнего оснований цилиндра. Сечения этих трех тел плоскостью параллельной основаниям цилиндра на расстоянии x от точки A равны, соответственно, πD^2, πx^2 и $\pi x(D-x)$. Архимед рассматривал эти сечения как материальные пластинки, веса которых равны их площадям. Он заметил, что если перенести сечения конуса и шара в точку C оси цилиндра, находящуюся на расстоянии D выше точки A, а сечение цилиндра оставить на месте и рассматривать линию CAB как рычаг с точкой опоры A, то моменты сечений цилиндра, конуса и шара будут равны,соответственно, $\pi D^2 x$, $\pi D x^2$ и $\pi D^2 x-\pi D x^2$. Поэтому перенесенные сечения конуса и шара будут уравновешивать сечение цилиндра. Архимед считал, что если равновесие имеет место для весов отдельных сечений, оно будет иметь место и для сумм этих весов. Суммой весов сечений тела Архимед считал вес всего этого тела, т.е. его объем. Если мы обозначим объемы цилиндра, конуса и шара, соответственно, $V_ц$,$V_к$ и $V_ш$, то сумма моментов перенесенных сечений равна $V_к D+V_ш D$, а сумма моментов сечений цилиндра равна произведению его объема на расстояние от точки A до его центра тяжести, т.е. $V_ц D/2$. Так как $V_к=V_ц/3$, мы получаем, что $V_ш=V_ц/2-V_ц/3=V_ц/6$ или, так как $V_ц=\pi D^3$, $V_ш=\pi D^3/6$. Если обозначить $D=2R$, мы можем переписать последнюю формулу в виде $V_ш = (4/3)\pi R^3$. Рассуждения Архимеда напоминают рассуждения Демокрита, но сечения тел у Архимеда не имеют конечной толщины, как у Демокрита, и между ними нет конечных расстояний, как у Пифагора. Поэтому у Архимеда сечения, из которых состоят тела больше похожи не на атомы античных атомистов, а на элементы множеств современной теоретико-множественной математики.

Аполлоний

Самым блестящим математиком античности был Аполлоний Пергский (ок. 250 - ок.175 до н.э.) Я изучал его труды еще в Москве при подготовке “Хрестоматии по истории математики” и позже, когда я рассматривал происхождение стереографической проекции и инверсии относительно конических сечений. Более интенсивно я стал изучать труды Аполлония в Стейт Колледже всвязи с руководством мастерской и докторской диссертациями моей аспирантки Д.Родс.

Я упоминал, что предки Аполлония были жрецами бога Аполлона, и потомками жрецов хеттского бога Апулунаша, святилище которого находилось в Перге.

С культом Аполлона связано появление конических сечений: греки считали, что Аполлон родился на острове Делас. Однажды, согласно легенде на этом острове разразилась эпидемия чумы, и его жители, обратились к жрецам бога Аполлона, считавшегосяся покровителем медицины, с просьбой помочь им. Жрецы сказали, что надо удвоить кубический алтарь в святилище Аполлона. Делийцы изготовили второй кубический алтарв и поставили его на первый, но эпидемия не прекратилась. Тогда жрецы сказали, что удвоенный алтарь также должен иметь форму куба, т.е. ребро x нового куба должно быть связано с ребром a первоначального куба соотношением $x^3=2a^3$. Эту задачу решил в IV в. до н.э. греческий математик Менехм с помощью пересечения двух парабол $y^2=2ax$ и $x^2=ay$, где величена x равна абсциссе точки пересечения этих парабол.Менехм определял параболу как сечение поверхности прямого кругового конуса с прямым углом при вершине плоскостью перпендикулярной одной из прямолинейных образующих конуса и называл параболу "сечением прямоугольного конуса". Менехму приписывают также открытие других конических сечений гиперболы и эллипса – "сечение тупоугольного конуса" и "сечение остроугольного конуса".

Коническим сечениям были посвящены не дошедшие до нас сочинение Аристея "О телесных геометрических местах" и "Начала конических сечений" Евклида , а таже несколько сочинений Архимеда. Архимед определил также "сфероиды" – эллипсоиды вращения, "тупоугольный коноид"– одну полость двуполостного гиперболоида вращения и "прямоугольный коноид" – параболоид вращения.

Аполлоний в "Конических сечениях", в отличие от его предшественников, рассматривал не только прямые, но и наклонные круговые конусы, и сечение этих конусов произвольными плоскостями, а также плоские сечения конических поверхностей, расположенных по обе стороны от вершины конуса. Так как при этом старые названия конических сечений теряют свой смысл, Аполлоний дал коническим сечениям новые названия "парабола", "эллипс" и "гипербола" вместо применявшихся Менехмом, Евклидом и Архимедом названий "сечение прямоугольного конуса", "сечение остроугольного конуса" и "сечение тупоугольного конуса". Аполлоний определил эти кривые как сечения поверхности одного и того же прямого или наклонного кругового конуса, расположенной по обе стороны от вершины конуса. Словом "гипербола" Аполлоний называл только одну ветвь гиперболы, а обе ветви гиперболы он называл "противоположными гиперболами".

Аполлоний нашел уравнения параболы, эллипса и гиперболы в виде $y^2=2px$, $y^2=2px-(p/a)x^2$ и $y^2=2px+(p/a)x^2$ в системе координат, одной из осей которых является произвольный диаметр сечения, а другой – касательная к сечению в конце этого диаметра. Эта система координат в общем случае является косоугольной.

Названия Аполлония параболы, эллипса и гиперболы означают, соответственно, "приложение", "недостаток" и "избыток". Эти названия связаны с тем, что при построении точек параболы применяется приложение к отрезку 2p прямоугольника с высотой x равновеликого квадрату со стороной y, а при построении точек эллипса и гиперболы применяется “приложение с недостатком” и “приложение с избытком”. Аполлоний называл отрезок 2p “прямой стороной” сечения, а отрезок 2a – “поперечной стороной” эллипса или гиперболы.

Аполлоний понимал, что аналогом эллипса является пара противоположных гипербол. Поперечная сторона эллипса или гиперболы равна отрезку оси абсцисс между ее точками пересечения с эллипсом или с двумя ветвями гиперболы. Если перенести ось ординат параллельно так, чтобы она проходила через центр эллипса или гиперболы, уравнения этих кривых примут вид $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, где $b^2 = ap$.

Аполлоний рассматривал метрические свойства конических сечений – оси симметрии, фокусы и инверсии относительно окружности, эллипса, гиперболы и параболы; аффинные свойства – диаметры, центр, сопряженные диаметры, асимптоты и касательные; проективные свойства – полюсы и поляры, двойные отношения, гармонические четверки точек.

Термины “абсцисса” и “ордината” происходят от латинских переводов тех выражений, которыми Аполлоний называл эти отрезки.

Аполлоний называл осью наклонного кругового конуса прямую, соединяющую вершину A конуса с центром круга основания. Если конус пересечен плоскостью конического сечения и эта плоскость высекает из плоскости основания конуса прямую DE, Аполлоний опускал на эту прямую из центра основания перпендикуляр, пересекающий поверхность конуса в точках B и C. Треугольник ABC, проходящий через ось конуса и его вершину A, Аполлоний называл осевым треугольником. Плоскость конического сечения, высекает из поверхности конуса эллипс, параболу или две ветви гиперболы. Осью Ox служит линия пересечения секущей плоскости с плоскостью треугольника ABC, ось Oy параллельна прямой DE. В случае эллипса и гиперболы Аполлоний выражал отношение 2a/2p через углы треугольника ABC и угол между прямыми BC и Ox. В случае пораболы Аполлоний выражал отношение 2p/AO через углы треугольника ABC.

Пары точек гармонических четверок Аполлоний называл “имеющими то же самое отношение”. В современной математике отношения отрезков, составляющих двойное отношение гармонической четверки точек отличаются знаком, но античные математики, не применявших отрицательных величин, считали эти отношеня равными.

Используя двойные отошения, Аполлоний по существу рассматривал проективные ряды точек прямых и проективные пучки прямых и пользовался тем фактом, что коническое сечение можно получить как геометрическое место точек пересечения соответственных прямых двух проективных пучков. Этот факт в явном виде сформулировал только Якоб Штейнер (1796-1863). Аполлоний пользовался также тем, что касательные к коническому сечению соединяют точки двух проективных прямых, связанные проективным соответствием между этими прямыми.

Аполлоний доказал, что два конических сечения могут иметь не более 4 общих точек, а через 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой проходит единственное коническое сечение.

Аполлоний определял фокусы эллипса и гиперболы , как такие точки большой оси эллипса и вещественной оси гиперболы, которые лежат на поперечной стороне сечения, соответствующей этой оси, и обладают тем свойством, что произведение расстояний от этих точек до вершин сечения равно b_2=ap и называл фокусы “точками начал приложений”. Под приложениями он понимал прямоугольники,стороны которых равны расстояниям от фокуса до вершин сечения. Поэтому абсциссы x фокусов эллипса удовлетворяют условию $x(2a-x)=ap$ и абсциссы x фокусов гиперболы удовлетворяют условию $x(2a+x)=ap$. Умножая обе части этих равенств на p/a мы получим в обоих случаях соотношение $y^2= p^2$, которое показывает, что в силу определения Аполлония, абсолютные величины ординат точек эллипсов и парабол, ординаты которых совпадают с ординатами фокусов, равны p.

Аполлоний доказал, что если вершины эллипса или гиперболы – точки A и B, касательные к сечениям в этих точках – прямые AC и BD, E – произвольная точка сечения, прямая CD – касательная к сечению в точке E, а F и G – фокусы, то углы CFD и CGD – прямые для всех точек E, а угол CEF равен углу GED.

В силу последнего равенства, если из одного фокуса эллипса выходят лучи света, то, отразившись от эллипса, они соберутся в другом его фокусе, и если в этом фокусе будет находится горючий материал, он загорится. Этим объясняется введенный Иоганнесом Кеплером (1571–1630) термин “фокус”, происходящий от латинского слова focus – “очаг”. В силу того же равенства, лучи,выходящие из фокуса гиперболы, отражаются от нее таким образом, что продолжения отраженных лучей пройдут через второй фокус гиперболы. Сам Аполлоний о свойствах световых лучей, выходящих из фокусов эллипса и гиперболы, не упоминал. Аполлоний доказал утверждения равносильные тому,что фокальные радиусы-векторы FE и GE точек E сечения с абсциссами x в случае эллипса равны $a+ex$ и $a- ex$, а в случае гиперболы равны $ex+a$ и $ex-a$, где e – эксцентриситет эллипса, равный $1-p/a$ и эксцентриситет гиперболы, равный $1+p/a$. Отсюда следует, что фокальные радиусы-векторы FE и GE точек E эллипса и гиперболы равны произведениям e на расстояния от точек E до прямых $x = a/e$ и $x =-a/e$. Эти прямые в настоящее время называются директрисами эллипса и гиперболы.

Аполлоний не упоминал директрис, но указывал,что сумма фокальных радиусов-векторов точек эллипса и разность фокальных радиусов-векторов точек гиперболы постоянны и равны 2a.

Аполлоний не упоминал фокуса параболы и его свойств, в частности того свойства, которое использовал Архимед при обороне Сиракуз. По-видимому, Архимед, погибший при взятии Сиракуз римлянами, открыл это свойство фокуса параболы незадолго до своей гибели, и оно не было известно Аполлонию.

В V книги “Конических сечений”Аполлоний рассматривал проведение из любой точки плоскости нормалей к коническим сечениям, т.е. прямых перпендикулярных касательным в их точках касания. Аполлоний доказал, что отрезки этих нормалей являются минимальными или максимальными прямыми, проведенными из данных точек к коническим сечениям. Задача о проведении таких линий является частным случаем задачи об условном экстремуме, т.е. об определении максимума или минимума функции $f(x,y)$ при условии, что переменные x, y связаны условием $F(x, y) = 0$.

Решение этой задачи в общем виде разработал Жозеф Луи Лагранж (1736 -1813), который свел ее к нахождению экстремума функции
$U(x, y) = f(x,y) + lF(x,y)$.

Вычисляя частные производные $U_{x'}$ и $U_{y'}$ для функции

$$f(x,y) =(x -x_o)^2 + (y -y_o)^2$$

и для уравнения $F(x,y) = 0$ конического сечения, приравнивая $U_{x'}$ и $U_{y'}$ нулю и исключая из полученных равенств l , мы найдем уравнение той самой вспомогательной гиперболы, которую определил Аполлоний при проведении нормалей к коническому сечению из точки M с координатами x_o и y_o. Если это сечение пересекается с вспомогательной гиперболой в точках N и P, то искомыми нормалями являются прямые MN и MP.

Несомненно, что Лагранж разработал свой метод, изучая решение Аполлония, изложенное в V книге “Конических сечений”, которая появилась в латинском переводе Галлея в 1710 г.

В том случае, когда точки N и P сливаются, т.е. вспомогательная гипербола касается конического сечения, отрезок MN называется радиусом кривизны конического сечения в точке N, а точка M называется центром кривизны сечения в точке N. В настоящее время геометрическое место центров кривизны кривой называется эволютой этой кривой.

Аполлоний сначала находит центр кривизны конических сечений в их вершинах и доказывает, что радиусы кривизны сечений в их вершинах равны половинам прямых сторон сечений, соответствующих осям, проходящим через эти вершины. Далее Аполлоний приводит пропорции равносильные уравнениям эволют параболы, эллипса и гиперболы. Эволюта параболы -полукубическая парабола, состоящая из двух вогнутых кривых, соединенных в точке возврата. Эволюта эллипса - астроида -замкнутая кривая, состоящая из четырех вогнутых кривых, соединенных попарно в точках возврата. Эволюта гиперболы - псевдоастроида, состоящая из двух ветвей, каждая из которых образована двумя вогнутыми кривыми, соединенными в точке возврата. Все эти кривые - алгебраические, первая - 3-го порядка, вторая и третья -6-го порядка. Точки возврата этих кривых - центры кривизны параболы, эллипса и гиперболы в их вершинах. Аполлоний не рассматривал строения этих кривых.

Равносильность пропорций Аполлония и уравнений эволют конических сечений была доказана Т.Л.Хизсом в 1896 г., однако его доказательства были изложены столь кратко, что остались почти не замеченными в XX веке,

Аполлоний не указывает каким образом он пришел к этим пропорциям. Профессор Киевского университета М.Е.Ващенко – Захарченко (1825 –1912) в своей "Истории геометрии", опубликованной в 1883 г., высказал предположение,что Аполлоний владел элементами дифференциального исчисления, но в своих работах формулировал результаты, полученные с помощью этого исчисления, в терминах античной математики. Ващенко – Захарченко не рассматривал пропорций Аполлония, которые изучал Хизс, но так как эволюты конических сечений являются огибающими нормалей этих кривых, получить их уравнения без помощи дифференциального исчисления не представляется возможным.

В VI книге Аполлоний доказал, что все параболы подобны между собой, и нашел условия подобия эллипсов и гипербол. Из этих условий следует, что всякие два эллипса и всякие две гиперболы можно перевести друг в друга аффинным преобразованием. Из определения Аполлония конических сечений следует, что всякие два конические сечения можно перевести одно в другое проективным преобразованием.

Аполлоний определял диаметры конических сечений как геометрические места середин параллельных хорд этих сечений, поэтому эти сечения переходят в себя при косом отражении от их диаметров в направлении параллельных хорд. Аполлоний не рассматривал преобразований конических сечений, являющихся произведениями косых отражений от двух диаметров, эти произведения являются аффинными преобразованиями, сохраняющими площади фигур и называемыми в настоящее время параболическими, эллиптическими и гиперболическими поворотами. Многие теоремы Аполлония могут быть легко доказаны при помощи этих поворотов, например, известная теорема из VII книги о том, что параллелограммы, построенные на сопряженных диаметрах эллипса или гиперболы равновелики прямоугольнику, построенному на осях этих сечений.

Выше я упоминал о других математических сочинениях Аполлония, в частности, о "Плоских геометрических местах", где рассматриваются инверсии относительно окружностей и другие преобразования, переводящие "плоские геометрические места ", т.е. прямые линии и окружности, в такие же геометрические места, и о трактате "Касания", где инверсии относительно окружностей применялись для решение геометрических задач.

Я упоминал о работах Аполлония по астрономии, в частности, о его теории двичения планет с помощью деферентов и эпициклов. Отмечу, что мнение Аристотеля о том, что в "надлунном мире" тела могут двигаться с постоянной скоростью по прямым линиям и окружностям, лежащее в основе небесной механики Аполлония,было опровергнуто трудами Кеплера, Галилея и Ньютона, которые доказали, что на самом деле небесная механика основана на тех же принципах, что и земная, и что благодаря этому планеты и кометы движутся по коническим сечениям, в одном из фокусов которых находится Солнце. Созданная Аполлонием теория конических сечений нашла широкое применение в небесной механике.

Важное значение для астрономии имела стереографическая проекция сферы на плоскость, основанная на одном из первых предложений "Конических сечений" Аполлония, в котором доказано, что в наклонном круговом конусе кроме круговых сечений параллельных основанию имеется второе семейство круговых сечений. При стереографической проекции прямые, проектирующие точки окружности на сфере, образуют поверхность кругового конуса, в общем случае наклонного, и пересечение этой поверхности с плоскостью проекции является круговым сечением второго семейства. Поэтому при стереографической проекции окружности на сфере, не проходящие через центр проекции, изображаются окружностями на плоскости. Другим важным свойством этой проекции является ее конформность, т.е. сохранение углов между линиями. Стереографическая проекция применялась в изобретенном Аполлонием астрономическом инструменте "арахне"и в средневековых астролябиях, основанных на тех же принципах, что и инструмент Аполлония.

Менелай

Моя книга "История неевклидовой геометрии" начинается с рассмотрения сферической геометрии в "Сфериках" математиков II - I вв. до н.э. Феодосия и Менелая. Особенно важна книга Менелая, в которой доказано, что сумма углов сферического треугольника больше двух прямых углов, а также найдена первая теорема сферической тригонометрии - теорема Менелая о полном сферическом четырехстороннике. В этой теореме роль синусов дуг играют хорды, стягивающие эти дуги.

Птолемей

Астрономический труд Клавдия Птолемея (ок.100-ок.200 н.э) обычно называемый "Алмагест", в греческом оригинале назывался "Syntaxis mathematike", т.е."Математическое сочинение", что отражало мнение Аристотеля о "надлунном мире" как области математики. Сочинение Птолемея в разных рукописях называлось по-разному, одно из этих названий "Megiste Syntaxis " - "Величайшее сочинение" было переделано арабами в "ал-Маджисти", откуда и произошло общепринятое название "Алмагест". В I книге "Алмагеста" доказываются теорема Менелая, теорема Птолемея, равносильная формуле синуса суммы двух дуг, и приводится таблица хорд, равносильная таблице синусов. Птолемей применял теорему Менелая для решения задач сферической астрономии. В "Алмагесте" изложена теория движения Солнца, Луны и 5 планет по деферентам и эпициклам в пустом пространстве.

В другом астрономическом труде Птолемея “Планетные гипотезы” изложена теория движения тех же светил по трубам в массивных сферах. Идея массивных сфер, по-видимому, восходит к хрустальным сферам Пифагора”.

Я изучал также другие сочинения Птолемея - “Оптику”, “Гармонику” и “Географию”. “Оптика” Птолемея, как и “Оптика” Евклида, основана на теории зрительных лучей. “Гармоника” посвящена теории музыки. “География” содержит интереснейшую информацию о морях, реках, народах и городах Европы, Азии и Африки. Птолемей называл Волгу Ра. В его времена на Волге не было ни русских, ни татар, но, как видно из его сочинения, была мордва, на одном из диалектов которой Волга и сегодня называется Рав. Реку Урал Птолемей называл Даикс, эта река и сегодня называется по-казахски Жаик, откуда ее старое русское название Яик. Из сочинения Птолемея видно, что предки казахов жили около этой реки и в его времена. Названия многих городов Восточной Азии у Птолемея оканчиваются на ”-тра”. Так как на персидском языке того времени “город” обозначался словом “шатра”, ясно, что информация Птолемея о Восточной Азии была получена им от персов, которые до арабского завоевания обладали мощным морским флотом. Замечу, что китайское название компаса, буквально означающее “указатель юга”, - перевод персидского названия. Скандинавию Птолемей считал островом и называл Скандией, Балтийское море он называл Венедским заливом. Венеды - название нескольких славянских племен. От одного из них происходит название Венеции. Немцы называют славян Восточной Германии Wenden. Вентичи или вятичи - одно из русских племен, от этого названия происходит эстонское название русских vene, подобно тому, как латышское название русских krievs происходит от названия другого русского племени - кривичей.

Среди германских племен Европы Птолемей называл неметов. Распространено мнение, что название “немец” появилось потому, что немецкие купцы не умели говорить по-русски и были “как немые”. Меня всегда удивляло, почему название “немец” применялось только к одному народу, хотя остальные иностранцы находились в таком же положении. Из “Географии“ Птолемея видно, что название “немец” произошло не от слова “немой”, а от названия племени неметов, которые, по-видимому, какое-то время жили по соседству со славянами и с венграми, которые называют немцев nemet.

Диофант

Просматривая каталог рукописей в библиотеке святилища Ризы в Мешхеде, я обнаружил, что в этой библиотеке имеется рукопись арабского перевода нескольких книг “Арифметики” Диофанта (III в. н.э.) .Как я ни старался, мне не удалось получить фотокопию или микрофильм этой рукописи. Это удалось Рушди Рашеду из Парижа и Жаку Сезиано из Лозанны, которые издали эту рукопись с французским и английским переводами. Получив от них издания мешхедской рукописи, я перевел ее на русский язык и написал совместно с И.Г.Башмаковой и Е.И.Славутиным статью об этой рукописи. До появления этой рукописи из 13 книг ”Арифметики” Дофанта было известно только 6. В этой рукописи оказался перевод еще 4 книг этого труда. “Арифметика” Диофанта это по существу алгебра (арабский переводчик озаглавил свой перевод “Алгебра”). В известных ранее 6 книгах встречались 6 степеней неизвестной величены - число, квадрат, куб, квадрато-квадрат, квадрато-куб и кубо-куб. В новых книгах появились еще две степени - 8-я - квадрато-квадрато-квадрато-квадрат и 9-я - кубо-кубо-куб.

Большая часть труда Диофанта посвящена неопределенным уравнениям, в которых находятся решения, выражаемые рациональными числами a/b, где a и b - натуральные числа. Уравнения Диофанта допускают геометрическую интерпретацию, предложенную И.Г.Башмаковой: неопределенные уравнения с двумя и тремя переменными можно рассматривать как уравнения линии на плоскости и поверхности в пространстве. Пару уравнений с тремя неизвестными можно рассматривать как уравнения линии в пространстве. Более сложные неопределенные уравнения и системы таких уравнений допускают интерпретации в многомерных пространствах.

Для получения решений Диофант обычно дополнял свои уравнения линейными уравнения до n уравнений с n неизвестными и находил решения этих систем.

Я изучал значение “гипергеометрических” названий степеней у Диофанта и других математиков для создания многомерной геометрии.

Папп и Теон

Выше я упоминал александрийского математика Паппа (III в. н.э) Книга Паппа “Математическое собрание” содержит изложение многих результатов математиков предыдущих веков, труды которых не дошли до нас. В моей книге “История неевклидовой геометрии” я подробно рассматривал ряд теорем проективной геометрии, изложенных в труде Паппа, в том числе знаменитую теорему Паппа о шестиугольнике, вписанном в пару прямых.

Я изучал также дополнения Теона Александрийского (IV в.н.э.) к “Началам” Евклида и комментарии Теона к “Алмагесту” Птолемея, в которых он предлагал новое определение “составного отношения” геометрических величин с помощью умножения “знаменований отношений”. Развитие этого определения математиками средневекового Востока привело к расширению понятия чосла до того, что мы называем вещественным числом. Теон был также изобретателем той разновидности астролябии, которая была особенно популярна в средние века.

ал-Хорезми

Многие мои работы и работы моих учеников по истории науки посвящены трудам математиков и астрономов средневекового Востока.

Первым крупным из этих ученых был Мухаммад ал-Хорезми (ок.780- ок.850), уроженец Хорезма в Средней Азии, работавший в Багдаде. Одно из его имен ал-Маджуси показывает, что он происходил из семьи “магов” - зороастрийских жрецов. Ал-Хорезми хорошо знал доисламскую персидскую и индийскую математическую и астрономическоую литературу и знакомил с ней арабов. Он был один из тех среднеазиатских ученых, которых собрал сын халифа Гаруна ар-Рашида ал-Ма’мун, когда был наместником Хорасана в Мерве, а затем, когда ал-Ма’мун стал багдадским халифом, перевез с собой в Багдад. В Багдаде ал-Хорезми стал руководителем, “Дома мудрости” - академии наук ал-Ма’муна.

В 1964 г. мы с Ю.Е.Копелевич издали в Ташкенте русские переводы арифметического и алгебраического трактатов ал-Хорезми. В арифметическом трактате, сохранившемся только в средневековом латинском переводе, ал-Хорезми познакомил арабов с “индийским счетом” - тем, что мы называем арабскими цифрами и с арифметикой с помощью этих цифр.

По имени ал-Хорезми руководства по арифметике с помощью арабских цифр назывались в средневековой Европе Algorismus и Algorithmus, от последнего из которых произошел термин “алгоритм”. В алгебраическом трактате ал-Хорезми впервые появился термин “алгебра”. В этом трактате ал-Хорезми рассмотрел три канонических вида квадратных уравнения с положительными коэффициентами $x^2+ax=b$, $x^2+b=ax$ и $x^2=ax+b$. Ал-Хорезми приводил алгебраические уравнения к каноническому виду с помощью операций “ал-джабра” - “восполнения” и “ал-мукабалы” - ”противопоставления”, которые состояли в переносе вычитаемых членов в другую сторону уравнения в виде прибавляемых и сокращения равных членов в обеих частях уравнения. Поэтому ал-Хорезми назвал свою книгу “Краткой книгой об исчислении ал-джабра и ал-мукабалы”. В латинских переводах наука , основанная ал-Хорезми, называлась algebra et al-mucabala. Впоследствии вторая половина этого названия была отброшена.

Для каждого канонического вида квадратных уравнений ал-Хорезми формулировал правило решения, которое доказывал с помощью геометрической алгебры. Например, в случае уравнения $x^2 + 10x =39$ он изображал x2 в виде квадрата, пририсовывал к двум его смежным сторонам два прямоугольника со сторонами x и 5 и дополнял полученную Г-образную фигуру до полного квадрата квадратом со стороной 5. Так как площадь Г-образной фигуры по условию равна 39, площадь большого квадрата равна 39+25=64. Поэтому сторона большого квадрата равна 8, Но по построению эта сторона равна $x + 5$, откуда получаем $x =3$.

В алгебраическом трактате имеется “Глава об измерении”, содержащая геометрические задачи, а также главы о разделе наследств и о других экономических вопросах. В одной из этих глав впервые встречается термин "капитал" (рас'ал-мал, буквально ''главное имущество"), под которым ал-Хорезми понимал ссудный капитал.

В 1983 г., когда отмечалось 1200-летие со дня рождения ал-Хорезми, эти два трактата были переизданы с рядом дополнений А.Р.Юшкевича и Г.П.Матвиевской, а также были опубликованы русские, узбекские и таджикские переводы многих сочинений ал-Хорезми и несколько сборников работ, посвященных ал-Хорезми. В сборнике, изданном в Москве, я опубликовал русские переводы двух небольших астрономических трактатов ал-Хорезми об астролябии и о солнечных часах, рукописи которых хранятся в Стамбуле, а также переводы сохранившихся фрагментов второго арифметического трактата ал-Хорезми и его "Книги истории", продолжением которой был знаменитый исторический трактат ат-Табари.

В этом и в других сборниках и журналах я опубликовал также статьи о различных трудах ал-Хорезми. К тому же юбилею была выпущена научная биография ал-Хорезми, написанная мной совместно с П.Г.Булгаковым и А.Ахмедовым. В этой книге и в ряде статей был дан анализ астрономических таблиц ал-Хорезми, его "Квадривиума", имеющихся только в средневековых латинских переводах, и его географического трактата.

В турецком журнале "Эрдем" я, Ахмедов и ад-Даббах опубликовали обзор всех астрономических трактатов ал-Хорезми, хранящихся в Стамбуле и Ташкенте. В астрономических трактатах ал-Хорезми приводятся заимствованные у индийских астрономов правила, равносильные теоремам сферической тригонометрии, а также геометрические построения, позволяющие графически получить результаты, выражаемые этими формулами. Такие построения, которые я называю геометрической тригонометрией, впоследствии часто применялись астрономами средневекового Востока.

Географический трактат ал-Хорезми представляет собой описание "карты ал-Ма'муна", составленной в "Доме мудрости". В книге ал-Хорезми указаны географические координаты более 2000 пунктов - городов, "середин стран", концов горных хребтов, узловых точек рек и береговых линий океанов, морей, озер и островов. Характер этих линий между узловыми точками ал-Хорезми описывал специальными терминами своей классификации кривых линий. Сведения о Западной Европе и Восточной Азии ал-Хорезми заимствовал из "Географии" Птолемея, сведения о странах Арабского халифата - у арабских и персидских путешественников.

"Квадривиум" ал-Хорезми содержит краткое изложение теории чисел, геометрии, астрономии и теории музыки.

В астрономических трактатах ал-Хорезми систематически пользовался линиями синусов, тангенсов и котангенсов, введенными индийскими астрономами. Эти астрономы, познакомившиеся с трудами александрийских ученых в V в., называли дугу окружности "луком", стягивающую ее хорду - "тетивой", а перпендикуляр, опущенный из середины дуги на хорду, “стрелой”. Позже они ввели линию синуса, равную половине хорды и назвали ее “полутетивой”, но впоследствии для краткости стали называть ее тем же словом, что и тетиву. В VIII веке, когда арабы начали переводить труды индийских астрономов, они перевели слово “джива” - “тетива” в смысле хорды арабским словом ватар, обозначающим тетиву, а в смысле линии синуса оставили без перевода и транскрибировали как “джиб”. Когда в XII веке европейцы начали переводить трактаты арабских астрономов на латынь, они приняли слово “джиб” за “джайб” - “пазуха,карман” и перевели его словом sinus. Тангенсы и котангенсы индийцы и арабы рассматрували как тени горизонтального и вертикального гномонов и называли “обращенными и плоскими тенями”.

ал-Фергани и Бану Муса

В “Доме мудрости” работали Ахмад ал-Фергани (ок. 800 - 861) и братья Бану Муса ибн Шакир.

Совместно с И.Г.Добровольским и Н.Д.Сергеевой я подготовил русские переводы астрономических трактатов ал-Фергани, которые в 1998 г. были опубликованы в Ташкенте во время празднования юбилея ал- Фергани.
В том же году в Москве вышла написанная мной и Н.Д.Сергеевой научная биография ал-Фергани.

Ал-Фергани, родом из Ферганы в Средней Азии, работал в Багдаде, был послан в Каир халифом ал-Мутаваккилем для ремонта нилометра. После окончания ремонта он был казнен и похоронен на христианском кладбище Каира. По-видимому, ал-Фергани, ранее скрывавший то, что он продолжал тайно исповедовать христианскую веру, в Каире выдал себя контактом с египетскими христианами - коптами, из-за чего и погиб.

По моему совету ад-Даббах перевел геометрический трактат братьев Бану Муса “Книга познания измерений плоских и шаровых фигур”.

М.М.Рожанская изучала “Книгу механики” братьев Бану Муса, в которой описаны 100 машин и механических приборов.

Сабит ибн Корра и Ибрагим ибн Синан

Я много занимался изучением трудов ученика братьев Бану Муса Сабита ибн Корры (836 -901) сабия из Харрана, который смог при дворе багдадских халифов сохранить веру своих предков. Харран - город в Северной Сирии, в древности бывший одним из главных городов государства Митанни, жители которого были звездопоклонниками. После завоевания Александром Македонским жители Митанни и их религия подверглись эллинизации. Впоследствии жители Харрана усвоили сирийский язык - особую форму арамейского языка, на котором говорили многие народы Ближнего Востока. После арабского завоевания жители Харрана стали называть себя сабиями, так как эта религия была разрешена Кораном.

Большинство трудов Сабита ибн Корры были написаны по-арабски, но он писал и по-сирийски и знал греческий язык. Многие сочинения Архимеда и V-VII книги “Конических сечений” Аполлония, не сохранившиеся в греческом оригинале, дошли до нас только в арабских переводах Сабита ибн Корры.

В 1984 г. я издал сборник русских переводов трактатов Сабита ибн Корры, а в 1994 г. вышла его научная биография, написанная мной совместно с Н.Г.Хайретдиновой.

Сабит ибн Корра был автором двух доказательств V постулата Евклида, написанных сначала по-сирийски, а потом переведенных им на арабский язык. В обоих трактатах была допущена логическая ошибка “постулирование основания”, в одном трактате это - предположение о существовании параллелограмма, в другом - предположение о возможности “простого движения”, т.е. параллельного переноса, из чего вытекает существование прямоугольника. Параллелограммы и прямоугольники невозможны в неевклидовых геометриях Лобачевского и Римана и возможны только в евклидовой геометрии, поэтому из их существования Сабит ибн Корра легко выводил V постулат.

Сабит ибн Корра был автором многих арабских математических, астрономических, механических, физических, географических, философских и медицинских трактатов, а также исторических трактатов, написанных на сирийском языке.

В его математических трактатах рассматривались теория составных отношений, сферическая тригонометрия, теория чисел, геометрические измерения, задачи интегрального исчисления, теорема Пифагора и ее обобщения. В астрономических трактатах изучались движение Солнца и Луны, видимость Луны, солнечные часы, в механических трактатах - рычажные весы и теория рычага.

В “Книге о сечениях цилиндра и его поверхности” Сабит ибн Корра рассматривал аффинное преобразование, сохраняющее площади фигур и переводящее круг в эллипс той же площади. В этом трактате рассматривалась также площадь поверхности части наклонного кругового цилиндра между двумя непараллельными плоскостями, выражаемая эллиптической функцией.

В астрономических трактатах Сабита ибн Корры, как и в трактатах ал-Хорезми, изложен ряд правил сферической астрономии равносильных формулам сферической тригонометрии. В астрономических таблицах сабия ал-Баттани, известного в Западной Европе под именем Albategnius, изложено много астрономических правил Ибн Корры, а также приведена таблица географических координат городов из его географического трактата.

Я и мои ученики изучали также труды внука Сабита ибн Корры Ибрагима ибн Синана (908-946). Как показали мы с М.М.Рожанской, в трактате об измерении параболы Ибн Синан применял аффинные преобразования общего вида, а также рассматривал переменные величины.

Очень интересен трактат этого ученого о построении конических сечений, изучавшийся С.А.Красновой. И.О.Лютер показала, что при построении гиперболы Ибн Синан применял проективное преобразование, переводящее окружность $x^2+y^2=a^2$ в равностороннюю гиперболу $x^2-y^2=a^2$. Преобразование состоит в том, что в точке M окружности проводится касательная MN до продолжения горизонтального диаметра и в точке N восставляется перпендикуляр NP к этому продолжению равный MN. Точки P образуют указанную гиперболу. Это преобразование может быть выражено формулами $x'=a^2/x$, $y'=ay/x$.

Мутазилиты и ар-Рази

Халиф ал-Ма'мун, покровительствовавший багдадским математикам и астрономам, по своим философским убеждениям был мутазилитом. Мутазилиты пытались дать рациональное обоснование догмам ислама и для этого использовали учение об атомистическом строении пространства и времени. Это учение позволяло им считать, что Аллах каждое мгновение заново творит мир и "ни один волос не может упасть с головы человека без воли Аллаха".

По вопросам математического атомизма у мутазилитов были два основные направления - школа ал-Джуббаи, которая развивала математический атомизм демокритовского типа, и школа ал-Ка'би, развивавшая атомизм пифагорейского типа. Имя ал-Ка'би, происходящее от слова ка'б - "куб", указывает на то, что он представлял тела в виде кубических решеток точек.

Просматривая 11-й том каталога рукописей ташкентского Института Востоковедения, я обнаружил сообщение о персидской рукописи, названной в каталоге "Трактат об исследовании частей тел". В описании рукописи она была названа "трактатом об измерении частей тел". Прочитав приведенное в каталоге начало рукописи, я понял, что название рукописи "Рисала-йи тахкик-и аджза'-и джисм "следует переводить "Трактат об исследовании частиц тела". В рукописи упоминался ал-Джуббаи и рассматривался вопрос о том, из скольких частиц, т.е. атомов пространства, состоит наименьшее тело. Трактат был написан в Средней Азии в XVIII веке, это указывает на то, что идеи математического атомизма были живы и в XVIII веке.Я опубликовал текст, русский и английский перевод этой и аналогичной арабской ташкентской рукописи в 1993 г. в Москве и Нью Дели.

Математический атомизм развивался не только религиозными философами, но и некоторыми учеными, работавшими в области естественных наук. К ним относился Абу Бакр ар-Рази (865- 925) автор знаменитых медицинских трактатов "Мансурова книга" и "Всеобъемлющая книга" и алхимических трактатов "Книга тайн" и "Книга тайны тайн".

Ар-Рази был известен в Западной Европе под именем Rhases.

Ал-Бируни, который считал себя продолжателем идей ал-Рази, составил список его трудов. В этом списке ал-Бируни упоминает сочинения ал-Рази “Книга о времени и пространстве”, “Трактат о том, что [тот факт, что] диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, не относится к геометрии” и “Что имело место между ним и Абу’л-Касимом ал-Ка’би [по вопросу] о времени”. В последнем трактате, по-видимому, ар-Рази защищал демокритовский математический атомизм. Совместно с Н.К.Маруповым мы анализировали сохранившиеся сведения о физических трактатах ар-Рази.

ал-Фараби и ал-Бузджани

Крупнейший арабский философ, уроженец Фараба на Сырдарье, ал-Фараби (ок.870 - 950) был автором нескольких математических и астрономических трудов. Так как Фараб находился на территории нынешнего Казахстана, а сам ал-Фараби происходил из тюркской военной аристократии, казахи относят его к предкам своего народа. Особенно активно изучал творчестно ал-Фараби мой ученик казах Ауданбек Кубесов.

Ал-Фараби был автором огромного энциклопедического труда “Второе учение” (“Первым учением” считалась “Первая философия” Аристотеля), самого ал-Фараби называли “Вторым учителем”.

“Второе учение” состояло из изложения логики, физики, математики, астрономии, музыки и метафизики (“божественной науки”). Сохранились только логическая, астрономическая и музыкальная части этого труда.

Мы с Кубесовым издали русские переводы математических трактатов ал-Фараби, важнейшие из которых - его комментарии к Евклиду и трактат о геометрических построениях, а также астрономическую часть его энциклопедии - комментарии к “Алмагесту” Птолемея. В Алма-Ате и Ташкенте изданы также русские и казахские переводы многих трактатов ал-Фараби

Трактат ал-Фараби о геометрических построениях был дополнен багдадским математиком и астрономом Абу’л-Вафой ал-Бузджани (940-998) учеником ученика Сабита ибн Корры.Трактат ал-Бузджани о геометрических построениях был издан в русском переводе моей ученицы С.А.Красновой. Ее перевод впоследствии был использован мной и Кубесовым при подготовке перевода трактата ал-Фараби.

В трактатах ал-Фараби и ал-Бузджани парабола называлась +“зажигательным зеркалом”, а фокус параболы -”точкой зажигания”. Из задач, решенных в этих трактатах, отметим задачу о построении квадрата равновеликого сумме n равных данных квадратов, равносильную задачи построения диагонали n-мерного куба, ребро которого равно стороне каждого из данных квадратов.

Ал-Бузджани был также автором арифметического трактата, в котором единственный раз в известной нам средневековой арабской литературе встречаются отрицательные числа. Следуя индийцам, он называет -20 “долг

20”, этот термин был известен и математикам средневековой Европы, называвшим “долг” debitum.

Важную роль в истории астрономии сыграла обработка ал-Бузджани “Алмагеста” Птолемея.

ал-Хазин

В VI томе “Научного наследства” я издал свой перевод трактата о пифагоровых тройках чисел Абу Джафара ал-Хазина (ум. ок.965) ,сабия, работавшего в Хорасане. Пифагоровыми тройками называются такие тройках чисел a, b, c, для которых $a^2+b^2=c^2$. В этом трактате указан закон композиции квадратичных форм

$$(x^2+y^2)(u^2+v^2) = (xu-yv)^2 + (xv+yu)^2,$$

равносильный закону умножения комплексных чисел $x+iy$ и $u+iv$.

Ал-Хазин был также автором комментариев к “Началам” Евклида и астрономического трактата, в котором он рассматривал движение Солнца, Луны и планет в массивных сферах.

Братья чистоты

В X веке в Басре и Багдаде работала группа ученых, писавшая трактаты под общим псевдонимом “Братья чистоты и друзья верности”. Всего эти “Бурбаки X века” написали 51 трактат. Эти трактаты охватывали все науки того времени – математические науки, логику, физику, геологию, биологию, медицину, философию, психологию и “божественную науку”. В математические науки входили, кроме обычного квадривиума т.е. теории чисел, геометрии, астрономии и теории музыки, также теория отношений и география. В логических трактатах излагались “Органон” Аристотеля и “Введение” Порфирия к “Категориям” Аристотеля.

Я и мои ученики особенно внимательно изучали геометрический трактат Братьев чистоты. В этом трактате рассматривались два вида геометрии: чувственная – то, что постигается зрением и осязанием – и умственная – то, что постигается разумом . Чувственной геометрией Братья чистоты называли атомистическую геометрию, умственной геометрией они называли геометрию “Начал” Евклида. Чувственную геометрию Братьев чистоты можно было бы назвать геометрией “Оптики” Евклида.

ал-Кухи и ал-Сиджзи

Во многих работах моих учеников изучались трактаты иранских математиков X -XI вв. Абу Сахла ал-Кухи и Абу Саида ас-Сиджзи.

В диссертации С.А.Красновой подробно описан “совершенный циркуль” ал-Кухи для вычерчивания конических сечений.

Р.Сафаров перевел на русский язык и опубликовал в ИМИ трактат ал-Сиджзи “Книга об измерении шаров шарами”, посвященный трехмерной геометрической алгебре. В этом трактате рассматривается разбиение куба с ребром a+b на кубы a^3 и b^3 и три параллелепипеда объемом (a+b)ab и аналогичное разбиение шара, обобщающее задачу Архимеда об арбелоне.

Ибн Сина

Энциклопедический трактат ал-Фараби получил дальнейшее развитие в “Книге исцеления” одного из крупнейших ученых средневековья Абу Али Ибн Сины (980-1037), известного в Европе под именем Авиценны. В названии этого трактата имелось в виду “исцеление души от невежества”.

Я с Н.А.Садовским перевели на русский язык и издали в Душанбе математические главы “Книги знания” персидского сокращения “Книги исцеления”. Строение “Книги исцеления “ и ее сокращений - “Книги спасения” и “Книги знания” было таким же, как строение “Второго учения” ал-Фараби: логика, физика, квадривиум , “божественная наука”.

В средние века была очень популярна “триада Авиценны” - его учение о том, что общие понятия могут быть трех видов - в разуме Бога, в вещах и в человеческом разуме. В Западной Европе эта триада развивалась Фомой Аквинским, который называл три вида общих понятий Ибн Сины “до вещей”, “в вещах” и “после вещей”.

Ибн Сина был крупнейшим врачом средневековья, по его “Канону медицины” учились врачи и Востока и Западной Европы. В “Каноне медицины”, рассматривая строение глаза, Ибн Сина объяснял зрение не с помощью зрительных лучей, как Евклид и Птолемей, а с помощью лучей, выходящих из источника света.

Ибн Сина был также автором философских, астрономических и математических трактатов и стихов.

В 1980 г. в родном городе Ибн Сины Бухаре, а также в Душанбе и Ташкенте праздновались 1000-летие со дня рождения Ибн Сины.

К этой дате было выпущено много сборников статей, посвященных этому ученому, я участвовал во многих из этих сборников.

Ибн ал-Хайсам

Во многих моих работах и работах моих учеников изучалось творчество одного из крупнейших ученых средневекового Востока ал-Хасана ибн ал-Хайсама (965 - ок.1040), известного в Европе под именем Альхазен, его часто называют “Отцом оптики”, так как его “Книга оптики” была основным руководством по этой науке и на Востоке и в Западной Европе.

Ибн ал-Хайсам был также автором большего числа трактатов по оптике, математике и астрономии.

Выше я упоминал о найденной в Самаре рукописи, содержащей несколько трактатов Ибн ал-Хайсама и список его сочинений, составленный им самим за несколько лет до известного ранее списка, помещенного в книге Ибн Аби Усайби'и .

Я перевел на русский язык и опубликовал два доказательства V постулата Ибн ал-Хайсама в его комментариях к "Началам" Евклида. В одном из этих доказательств он сделал ту же логическую ошибку постулирования основания, что и Сабит ибн Корра – допустил существование "простого движения", но во втором же доказательстве явно заменил V постулат Евклида эквивалентным ему утверждением, что одна прямая не может быть параллельна двум пересекающимся прямым. Это утверждение впоследствии получило название "аксиомы Плейфера". В первом доказательстве Ибн ал-Хайсам рассмотрел четырехугольники с тремя прямыми углами и три гипотезы о 4-м угле этих четырехугольников – гипотезы острого, тупого и прямого углов. Эти четырехугольники и гипотезы рассматривались в XVIII веке И.Г.Ламбертом. Гипотеза острого угла выполняется в неевклидовой геометрии Лобачевского, гипотеза тупого угла – в неевклидовой геометрии Римана, а гипотеза прямого угла – в евклидовой геометрии.

Ибн ал-Хайсам был также одним из основателей психологии,вопросы психологии были изложены в его "Книге оптики". Поэтому психологический термин "рефлекс" происходит от слова reflexio – "отражение".

Другие вопросы в комментариях Ибн ал-Хайсама к Евклиду рассмотрела моя ученица Г.З.Кулиева.

Трактаты Ибн ал-Хайсама о вычислении объемов изопериметрической задачи изучал Дж. ад-Даббах.

Трактаты Ибн ал-Хайсама о зажигательных зеркалах изучала моя ученица Н.В.Орлова.

Вопросы механики в сочинениях Ибн ал-Хайсама рассматривали М.М.Рожанская и Т.Д.Столярова.

ал-Бируни

Крупнейшим ученым средневекового Востока был Абу'р-Райхан ал-Бируни (973 -1048). Ал-Бируни родился в древней столице Хорезма Кясе, ныне это город Бируни в Каракалпатии, входящей в состав Узбекистана. Учителем ал-Бируни был хорезмский астроном и математик Ибн Ирак, родственник шаха Хорезма, учившийся в Багдаде у ал-Бузджани. Позже ал-Бируни работал в иранских городах Рее, ныне входящем в состав Тегерана, и Горгане на берегу Каспийского моря, в новой столице Хорезма Гургандже (ныне Ургенч – главный город Хорезмской области Узбекистана). После завоевания Хорезма Махмудом Газневи ал-Бируни работал в его столице Газне (ныне в Афганистане) при дворе Махмуда, его сына Мас'уда, (которому посвящен "Канон Мас'уда) и внука Маудуда. Во время похода Махмуда в Индию ал-Бируни некоторое время жил в Индии.

Труды ал-Бируни были предметом многих моих работ и работ моих учеников. Я уже упоминал о русских переводах сочинений ал-Бируни и таджикской транскрипции “Книги вразумления”, подготовленных при моем участии.

В 1973 г. к празднованию 1000-летия со дня рождения ал-Бируни были опубликованы научная биография ал-Бируни, написанная мной, М.М.Рожанской и З.К.Соколовской, книга об ал-Бируни, написанная мной и Б.М.Кедровым, и несколько сборников, в которых я участвовал. Юбилей ал-Бируни отмечался в Москве и Ташкенте.

При подготовке переводов сочинений ал-Бируни я консультировался с замечательным арабистом Михаилом Александровичем Салье,переводчиком “Тысячи и одной ночи” и I тома “Избранных произведений” ал-Бируни. М.А.Салье поначалу относился ко мне свысока, как мэтр к начинающему. Его отношение ко мне изменилось при следующих обстоятельствах. В переводе I тома ал-Бируни Салье привел таблицу звезд “стоянок Луны” - групп звезд, в которых Луна находится в каждый день лунного месяца. Эта таблица состояла из 7 столбцов - название стоянки, положение звезды в созвездии, “количество звезд в созвездии”, долгота звезды, широта звезды, сторона (северная или южная),“величина” звезды. В 3-м столбце стоят цифры, часто подряд, например 22, 23, 24. Я сказал Салье, что в 3-м столбце указано не количества, а номера звезд в созвездии по звездному каталогу Птолемея. В арабском языке, как и в многих других языках, “число” и “номер” выражаются одним и тем же словом. Салье понял свою ошибку и изменил свое отношение ко мне.

III книга “Канона Мас’уда” посвящена вопросам математики, необходимым для астрономии. Здесь вычислены хорды, стягивающие дуги равные 1/n окружности, т.е. стороны правильных многоугольников, вписанных в круг, даны определения тригонометрических линий, доказаны теоремы синусов плоской и сферической тригонометрии и приведены таблицы синусов и тангенсов.

В начале 5-й главы этой книги ал-Бируни писал: “Хотя единичное и относится к объектам счета, но если рассматривать единицу в [совокупности сущностей] обладающих веществом, то она не является истинной по своей сущности, а [принята] условно и по общему соглашению, как в части деления окружностей кругов ....У окружности круга к его диаметру имеется некое отношение, поэтому у числа окружности к числу диаметра также есть отношение, хотя оно и иррационально”. Под “сущностями, обладающими веществом” ал-Бируни имел в виду непрерывные величины, для которых, в отличие от натуральных чисел, единица выбирается условно, как градус для дуг окружности. Под “числом диаметра” он имел в виду натуральное число 2, а под “числом окружности” - обобщение понятия числа, то, что мы называем вещественным числом (как подходит этот термин к термину ал-Бируни “сущности, обладающие веществом”!). Иррациональное отношение, о котором здесь говорится - число π.

Определив синусы и тангенсы и приведя их таблицы, ал-Бируни формулирует правило квадратичного интерполирования этих таблиц, а затем приводит такое же правило “для всех таблиц”, т.е. для всех рассматриваемых им функций. В следующих книгах “Канона Мас’уда” встречается большое число функций, являющихся комбинациями алгебраических и тригонометрических функций. Ал-Бируни называл функции “таблицами”, так как задавал их с помощью таблиц. Изучению функциональных зависимостей, рассматриваемых в “Каноне Мас’уда”, была посвящена кандидатская диссертация М.М.Рожанской.

В книгах “Канона Мас’уда” о движении Солнца, Луны и планет имеются главы, названия которых мы перевели как главы о наглядном представлении движения этих небесных тел. На самом деле в этих главах ал-Бируни изложил восходящую к “Планетным гипотезам” Птолемея теорию движения этих тел по трубам в массивных небесных сферах.

В “Книге вразумления” ал-Бируни подробно изложил технику астрологических предсказаний, а в конце этой части книги написал, что для удачного предсказания прежде всего следует выяснить, что хочет услышать клиент, но искусство астролога состоит в том, чтобы, умело воспользовавшись имеющимися в его распоряжении элементами произвола, получить нужный результат с помощью канонического алгоритма астрологических предсказаний.

Я и мои ученики много занимались трактатами ал-Бируни об астролябиях. Сам ал-Бируни считал свою “Книгу исчерпания всех возможных способов построения астролябии” настолько важной, что, находясь в Индии, перевел ее на санскрит для индийских ученых вместе с “Началами” Евклида и “Алмагестом” Птолемея. Эта книга и три другие сочинения ал-Бируни об астролябиях – “Книга о том, что превращает потенцию астролябии в действительность”, “Книга о способе применения видов астролябии” и “ Книга жемчужин о проектировании сферы на плоскость” были переведены на русский язык учеником М.А.Сабирова Садыкджаном Вахабовым, защитившим на основе изучения этих сочинений кандидатскую диссертацию.

В “Книге исчерпания” в разделе о построении “совершенной” астролябии ас-Сагани, в которой стереографическая проекция небесной сферы на плоскость из одного полюса сферы,применяемая в обычных астролябиях, заменена проектированием небесной сферы на плоскость из произвольной точки оси небесной сферы, ал-Бируни применяет проективное преобразование.

<u>Омар Хайям</u>

В главе “Баку” я упоминал, что первыми сочинениями, которые я перевел с арабского на руссий язык были три сочинения Омара Хайяма (1048- 1131). В 1962 г. я опубликовал в Москве сборник трактатов Хайяма, содержащий факсимиле рукописей и переводы двух математических трактатов, механического трактата, пяти философских трактатов, отрывка из астрономических таблиц, а также “Книги о новом годе”.

В “Трактате о доказательстве задач алгебры и алмукабалы”, Хайам дал классификацию кубических уравнений, имеющих положительные корни, и для каждого типа уравнений предложил решение с помощью пересечения двух конических сечений, являющихся окружностью, равносторонними гиперболами с горизонтальными и вертикальными осями или асимптотами и параболами с горизонтальными или вертикальными осями. При этом Хайям подчеркивал аналогию между окружностями и равносторонними гиперболами.

Геометрический трактат Хайяма “Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида” состоит из трех частей: 1) о теории параллельных линий, 2) о теории отношений, 3) о теории составных отношений.

В 1-й части Хайям предложил доказательство V постулата Евклида на основе более наглядного постулата Аристотеля. В этом доказательстве Хайям впервые рассматривал четырехугольник с двумя прямыми углами при основании и двумя равными боковыми сторонами и три гипотезы о его равных верхних углах. Этот четырехугольник и три гипотезы рассматривал в XVIII веке Дж.Саккери. Как и в случае четырехугольника Ибн ал-Хайсама гипотеза острого угла выполняется в неевклидовой геометрии Лобачевского, гипотеза тупого угла - в неевклидовой геометрии Римана, а гипотеза прямого угла - в евклидовой геометрии.

Во 2-й части Хайям переоткрыл определение Теэтета равенства отношений, основанное на представлении отношений в виде непрерывных дробей и доказал эквивалентность этого определения и определения Евдокса, изложенного в V книге “Начал” Евклида. Обрывая непрерывные дроби можно получить рациональные приближения отношений с любой степенью точности.

В 3-ей части Хайям, развивая идею Теона о “знаменованиях” отношений, связывал с каждым отношением геометрических величин A/B обобщение понятия числа равносильное положительному вещественному числу. Подобно ал-Бируни Хайям писал: “Выберем единицу и сделаем ее отношение к величине G, как A к B. Будем смотреть на величину G не как на линию, поверхность, тело или время, но будем смотреть на нее, как на величину отвлеченную разумом от всего этого и принадлежащую к числам, но не к числам абсолютным и настоящим”. Под абсолютными и настоящими числами Хайям имел в виду натуральные числа. Далее Хайям доказывает, что “число” G составного отношения равно произведению аналогичных “чисел” отношений, из которых состоит это составное отношение.

В механическом трактате решается задача определения количеств золота и серебра в сплаве с помощью его взвешивания в воздухе и в воде.

В философском трактате “Ответ на три вопроса” Хайям подверг ревизии “триаду Авиценны”, считая, что общие понятия бывают только в вещах и в человеческом разуме. Эта утверждение Хайяма совпадает с точкой зрения европейских номиналистов, согласно которым общие понятия это только названия (nomina).

Сохранившийся отрывок из “Маликшахских астрономических таблиц” содержит список 100 неподвижных звезд с указанием их эклиптических долгот и широт и приписываемых им “темпераментов”.

В персидской “Книге о новом годе” (“Науруз- наме”) описывается празднование зороастрийского Нового года (Науруза) в доисламском Иране и реформы персидского солнечного календаря. Лунный год, введенный в Иране после его завоевания арабами, был короче солнечного на 10 дней и был неудобен для сельскохозяйственных работ. Поэтому иранские крестьяне пользовались доисламским солнечным календарем. Так как солнечный год немного больше 365 дней, его начало приводили к одному и тому же времени с помощью високосных годов, которые определялись различными календарными реформами. Хайям описал эти реформы и упомянув ту реформу, для разработки которой он был приглашен султаном Маликшахом в его столицу Исфахан, указал, что он не смог довести эту реформу до конца. Доисламский новый год начинался в день весеннего равноденствия и в организованной Хайямом обсерватории в течение ряда лет проводились наблюдения наступление этого момента. Хотя Хайям не пришел к окончательному выводу, предложенная им система високосов, состояла в том, что в течение 33-летнего периода было 8 високосных лет.
В этом календаре ошибка в 1 день образуется за 5000 лет, в то время как в грегорианском календаре такая ошибка образуется за 3333 года. Календарь Хайяма ,называемый по имени султана Джалал ад -Дина Маликшаха “джалали” или “малики”, был хорошо известен в странах Востока. Хайяму не удалось довести разработку реформы до конца, из-за убийства Маликшаха ассасинами и разрушения обсерватории Хайяма. Хайям надеялся своей книгой побудить преемников Маликшаха дать ему возможность продолжить свои наблюдения.

Позднее я и мои ученики перевели на русский язык и издали в ИМИ другой алгебраический трактат Хайяма, еще один его трактат о весах и трактат о музыке.

В 1957 г, мы с С.Б.Морочником опубликовали книгу “Омар Хайям - поэт, мыслитель и ученый”. В 1965 г. мы с А.П.Юшкевичем опубликовали научную биографию Хайяма. В 1999 г. я и Ш.А. де Фушекур опубликовали статью “Омар Хайям” во 2-м издании Энциклопедии Ислама.

В 2000 г. в родном городе Хайяма Нишапуре состаялся Международный конгресс посвященный 900-летию Хайяма.
На этом конгрессе был прочитан мой доклад об исследованиях творчества Хайяма в России.

ал-Идриси

Когда я был в Таллинне, я увидел в городском музее увеличенную страницу с арабским текстом. Оказалось, что это первое упоминание о Таллинне в книге арабского географа Мухаммада ал-Идриси (1100-ок.1165)

Ал-Идриси работал на острове Сицилия при дворе норманского короля Роджера. Сицилия была отвоевана норманами у арабов и арабский язык был там широко распространен. Книга ал-Идриси была посвящена королю и называлась “Книга Роджера”. Эта книга содержала подробное описание Европы, Азии и Африки и имела большое количество карт. Кроме круглой карты мира книга ал-Идриси содержала прямоугольные карты 70 участков Земли, являющихся пересечениями семи “климатов” и десяти полос, идущих с севера на юг. В описаниях стран указывались сухопутные и водные дороги и количества дней пути по этим дорогам между различными городами.

Ал-Идриси называл Эстонию Астланда, а город Таллинн, который русские называли Колывань он называл Калубан. Волгу ал-Идриси именовал арабским названием Итиль, откуда ее современное татарское название Идель. Днепр у него назывался Днабр, а Дон - ан-нахр ар-Русия - “река России”, слово “ан-нахр” является переводом скифского названия реки Дон. Среди русских городов ал-Идриси упоминает Мунишк - Минск и Сунубули - Смоленск.

Особенно хорошо ал-Идриси был знаком с Западной Европой того времени. Англию ал-Идриси называл Ингилтара - от итальянского названия этой страны Inghilterra, Данию - Данамарха, Исландию - Исланда, Норвегию - Нурваджа. Ал-Идриси указывал многие города Западной Европы, столицу Норвегии Осло называл Услу, это старинное название своей столицы норвежцы вернули только в 1905 г.

Насир ад-Дин ат-Туси

Математическим трудам Насир ад-Дина ат-Туси (1201- 1274) была посвящена моя первая работа 1951 г. по истории науки. Его “Трактат о полном четырехстороннике” был первым средневековым сочинением, в переводе которого я участвовал. Позже я перевел и опубликовал в ИМИ трактат ат-Туси о параллельных линиях и неоднократно рассматривал его “Изложение Евклида”. Изложение ат-Туси трактатов Архимеда было темой кандидатской диссертации моего ученика А.Кубесова.

Насир ад-Дин ат-Туси сначала работал в государстве иранских террористов - ассасинов, наводивших ужас на весь Ближний Восток, где ат-Туси написал несколько трактатов, в том числе “Трактат о полном четырехстороннике” на персидском языке.

В начале монгольского завоевания Средней Азии и Ирана ассасины убили нескольких монгольских военачальников, что привело к истреблению ассасинов монголами и к осаде столицы ассасинов Аламута. Ат-Туси, живший в то время в этом городе, уговорил главу ассасинов сдаться монголам и сам перешел на сторону монголов, у которых он вскоре сделался советником Хулагу-хана. Другим советникон хана был астроном и математик Хусам ад-Дин Салар, ранее служивший в Хорезме и перешедший на сторону монголов после того, как шах Хорезма решил напасть на Багдад, где тогда еще находился халиф.

Ат-Туси в своих трактатах, написанных у ассасинов, упоминал Салара с большим уважением, но оказавшись вместе у монголов, они стали враждовать. Когда монголы решили идти на Багдад, Салар, как и в Хорезме, стал предостерегать против нападения на священную особу халифа, но ат-Туси убедил монголов, что взятие Багдада никаких бед не принесет. Монголы взяли Багдад и уничтожили Багдадский халифат, ат-Туси лично вел с халифом переговоры о сдаче, после чего стал главным советником Хулагу-хана.

После взятия Багдада ат-Туси уговорил Хулагу-хана построить в его столице Мараге в Иранском Азербайджане астрономическую обсерваторию и научный центр. Обсерватория была построена и Хулагу-хан приказал своим солдатам не убивать ученых, как они делали раньше, а привозить их в Марагу, и свозить туда все научные книги и инструменты.

Вскоре Марагинская обсерватория стала крупнейшим в мире научным центром. Работал в ней и Салар, но после появления арабской версии "Трактата о полном четырехстороннике", где ат-Туси сурово критиковал его, научный авторитет Салара заметно уменьшился, что позволило монголам казнить его за "багдадское пророчество".

"Трактат о полном четырехстороннике" был одним из первых сочинений, специально посвященных сферической тригонометрии. Теоремой о полном четырехстороннике называли теорему Менелая - первую теорему сферической тригонометрии. Ат-Туси решил все 6 случаев задач определения сторон и углов сферического треугольника по трем элементам. В частности, ат-Туси впервые вычислил все стороны сферического треугольника по его трем углам. Для этого он определил для каждого сферического треугольника полярный треугольник, стороны которого лежат на больших окружностях, полюсами которых являются вершины данного треугольника, и показал, что стороны одного из двух взаимно полярных сферических треугольников выражаются через углы другого. Тем самым ат -Туси свел задачу об определении сторон сферического треугольника по его углам к уже известной задаче определения углов сферического треугольмика по трем сторонам.

"Изложение Евклида" ат-Туси стало одним из важнейших математических сочинений того времени. В нем было воспроизведено доказательство V постулата Евклида из трактата ат-Туси о параллельных линиях,но, в отличие от этого трактата, ат-Туси добавил наглядный постулат, равносильный V постулату Евклида.

К системе аксиом Евклида ат-Туси добавил "аксиомы выбора".

Ат-Туси приписывался еще один вариант "Изложения Евклида", известный в Западной Европе, однако было установлено, что он был написан после смерти ат-Туси. В статье, написанной об этом сочинении мной, Кубесовым и Собировым, доказывается, что автором этого трактата был сын ат-Туси, который стал руководителем Марагинской обсерватории после смерти отца.

Кроме изложения “Начал” Евклида и трактатов Архимеда ат-Туси написал также “Изложене Алмагеста” и изложения всех “промежуточных книг”, которые следовало изучать между “Началами” Евклида и “Алмагестом”. К этим книгам относились “Данные” и “Оптика” Евклида, труды античных “малых астрономов”, в том числе Феодосия и Менелая, а также трактаты Бану Муса и Сабита ибн Корры..

В арифметическом трактате ат-Туси “Сборник по арифметике с помощью доски и пыли“ изложен способ извлечения корня любой степени из любого натурального числа и формула бинома Ньютона для любого натурального показателя степени n.

Ат-Туси был автором астрономических таблиц и многих астрономических трактатов, а также трактатов по физике, геологии, философии, логике и морали. В астрономических таблицах были указаны координаты многих городов и стран, в том числе страны Русь и города Киева.

Ученик ат-Туси Кутб ад-Дин аш-Ширази (1236 - 1311) был автором энциклопедического и астрономических трактатов, а также комментариев к недошедшему до нас сочинению ат-Туси “Трактат о движении качения и об отношении между плоским и кривым”. Текст и русский перевод этого трактата мы с ад-Даббахом опубликовали в “Научном наследстве”.
В XIV веке столицей монгольских ханов стал Табриз, ныне главный город Иранского Азербайджана, туда была переведена и обсерватория из Мараги. Руководителем Табризской обсерваторией был приглашен аш Ширази.

Улугбек и ал-Каши

Работая в Баку я подготовил русский перевод “Ключа арифметики” и “Трактата об окружности” Джемшида ал-Каши (ум. ок. 1430), руководителя астрономической обсерватории в Самарканде, основанной правителем Самарканда Улугбеком (1394-1449), внуком Тимура.

В 1956 г. я издал в Москве сборник русских переводов этих трактатов ал-Каши с факсимиле рукописей. Этот сборник содержал также изложение Мирима Челеби (ум.1525) трактата ал-Каши об определении синуса 1°.

В Самарканде учился турецкий астроном и математик Кази-заде ар-Руми (1360-1437). Тимур поручил ему воспитание своего внука Улугбека. Ар-Руми привил своему ученику любовь к астрономии и математике.

Когда Улугбек стал правителем Самарканда, он организовал там обсерваторию по образцу Марагинской, и пригласил туда из Ирана ал-Каши.

В этой обсерватории были подготовлены “Астрономические таблицы Улугбека”, в работе над которыми участвовали, кроме самого Улугбека, ал-Каши, ар-Руми и ученик Улугбека Али Кушчи (ум.1474).

Слово “кушчи” означает “сокольничий”, это имя указывает на то, что первоначально ал-Кушчи был сокольничим Улугбека, любившего соколиную охоту, а затем стал под руководством Улугбека изучать астрономию и математику.

Ал-Каши и ар-Руми умерли до окончания работы над "Астрономическими таблицами Улугбека", и эти таблицы были закончены ал-Кушчи.

В 1449 г. Улугбек был убит, а его обсерватория разгромлена. В настоящее время сохранились только остатки главного инструмента обсерватории - секстанта, я видел их, когда был в Самарканде.

Ал-Кушчи, взяв с собой наиболее ценные книги из библиотеки обсерватории, уехал из Самарканда и после взятия турками Константинополя приехал в этот город, который турки назвали Стамбулом. Ал-Кушчи стал директором медресе при мечети Айя София, в которую был превращен константинопольский храм Святой Софии. Упоминавшийся выше Мирим Челеби, сын дочери ал-Кушчи и сына ар-Руми, был известным турецким астрономом.

"Ключ арифметики" - главный труд ал-Каши, состоит из 5 книг: 1) об арифметике целых чисел, 2) об арифметике дробей, 3) об "арифметике астрономов", т.е.об арифметике шестидесятеричных дробей, 4) о геометрии и 5) об алгебре.

В I книге ал-Каши, следуя ат-Туси , изложил извлечение корней любой натуральной степени из любого натурального числа и формулу бинома Ньютона для любого натурального показателя степени. В отличие от ат-Туси, который производил арифметические действия на доске, покрытой пылью, ал-Каши излагал выполнение арифметических действий на бумаге.

В III книге ал-Каши распространил шестидесятеричную позиционную систему с дробей на натуральные числа. Шестидесятеричными дробями, следуя Птолемею, пользовались астрономы средневекового Востока.
Ал-Каши также распространил десятичную позиционную систему с натуральных чисел на дроби, т.е. ввел десятичные дроби.

В IV книге ал-Каши привел таблицу удельных весов различных веществ, а также поместил архитектурную главу.

В V книге ал-Каши привел цифры сияка, которыми пользовались купцы.

"Трактат об окружности" ал-Каши был посвящен вычислению приближенного значения числа π с максимальной практически необходимой точностью. Ал-Каши рассмотрел окружность с радиусом равным радиусу сферы неподвижных звезд и за приближенную величину ее длины принял среднее арифметическое между периметрами вписанного и описанного правильных N-угольников, где число N должно быть таким, чтобы разность между этими периметрами была бы меньше толщины конского волоса.
Ал-Каши подсчитал, что N = 3.228 . Вычисления ал-Каши производил в шестидесятеричных дробях, но результат выразил также и в десятичных дробях. Полученное им приближенное значение π имало 17 верных десятичных знаков.

В трактате об определении синуса 1° ал-Каши решал задачу необходимую для составления таблицы синусов в "Астрономических таблицах Улугбека”. Для этого он решал кубическое уравнение $4x^3+q=3x$, где $q = \sin 3^o$ и $x = \sin 1^o$. Так как $\sin 1^o$ – небольшая величина, ее куб еще меньше, за 1-е приближение ал-Каши принимает $x_1=q/3$, 2-е приближение – $x_2=(q+4x_1^3)/3$, 3-е приближение – $x_3=(q+4x_2^3)/3$ и т.д.

Этой же проблеме был посвящен трактат самого Улугбека, который я перевел и опубликовал в ИМИ в1960 г. Мы получили ксерокопию списка каирской арабской рукописи этого трактата из Берлина. Рукопись была анонимная. Другая анонимная арабская рукопись того же трактата имеется в Стамбуле и турецкий историк науки Салех Зеки опубликовал ее краткое изложение в своей книге “Оставшиеся следы”. Он считал, автором этого трактата ар-Руми на основании сообщения Мирима Челеби о том, что его дед ар-Руми написал трактат об этой проблеме. Поэтому мы также считали автором этого трактата ар-Руми.

В выяснении авторства этого трактата важную роль сыграл узбекский академик Ташмухаммед Ниязович Кары-Ниязов, автор книги “Астрономическая школа Улугбека”. Я часто спорил с ним на тему, был ли сам Улугбек ученым, или только покровителем наук. Однажды мы встретились с ним в Институте востоковедения Академии наук Узбекистана. “Сейчас я вам докажу, что Улугбек сам был автором научных трактатов” – сказал Кары-Ниязов мне и попросил рукопись комментариев ал-Бирджанди к “Астрономическим таблицам Улугбека”. Получив рукопись, он показал мне слова ал-Бирджанди о том, что об определении синуса одного градуса были написаны два трактата, один – “султаном геометром” ал-Каши, а другой – “султаном-мучеником” Улугбеком. Далее ал-Бирджанди подробно описал содержание анонимного трактата. Что же касается трактата ал-Руми, описанного его внуком, то он был написан на персидском языке. Сопоставив все это, мы с А.Ахмедовым опубликовали в 1975 г. в Ташкенте статью о том, что автором анонимного трактата был не ар-Руми, а Улугбек. В 1976 г. я поместил в “Хрестоматии по истории математики” важнейшую часть этого трактата, указав, что его автором был Улугбек

Об этом я и Ахмедов сделали доклад на симпозиуме в Стамбуле в 1994 г., этот доклад был опубликованный в 2000 г.

В главе “Пенсильвания”я подробно описал историю публикации английского перевода математического трактата Улугбека с его арабским текстом в статье, написанной мной вмесе с Я.П.Хогендайком.

В 2000 г. в родном городе ал-Каши Кашане состоялся международный конгресс, повященный 600-летию ал-Каши. На этом конгрессе М.М.Рожанская прочла мой доклад о трактатах ал-Каши и Улугбека об определении синуса 1^o.

Гипергеометрические названия степеней в Европе

Выше я упоминал, что названия степеней в “Арифметике” Диофанта были аддитивные, т.е.квадрато-кубом он называл 5-ю степень (5=2+3).

Такие же названия степеней применяли ат-Туси, ал-Каши и другие математики, писавшие на арабском языке.

Однако индийские математики применяли более сложную систему названий степеней: для тех степеней, которые можно представить как произведения чисел 2 и 3, они пользовались мультипликативными названиями, т.е. называли квадрато-кубом не 5-ю, а 6-ю степень (2.3=6), но для тех степеней, которые нельзя представить в виде произведений чисел 2 и 3, они пользовались аддитивными названиями с добавлением специального термина, указывающего, что это название аддитивное.

Французский историк науки Поль Таннери обнаружил один случай применения мультипликативных названий у греков - он нашел текст современника Диофанта александрийского христианского епископа Анатолия, который называл 5-ю степень первым невыразимым (protos alogos), 6-ю степень квадрато-кубом, а 7-ю степень - вторым невыразимым (deuteros alogos).

Текст, обнаруженный Таннери, позволил мне проанализировать названия степеней у итальянских и немецких алгебраистов эпохи Возрождения. Итальянский математик Лука Пачоли (1454-1514) в своей книге "Сумма [знаний] по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности" называл квадрат censo, куб - cubo, 4-ю степень - censo de censo, 5-ю степень - primo relato, 6-ю степень -censo de cubo, 7-ю степень - secondo relato и т.д.

Джироламо Кардано (1501-1576) в своем "Великом искусстве алгебраических правил" пользовался аналогичными латинскими названиями, вместо слова relato он писал relatum. Я в статьях и в книге "История математики с древнейших времен" объяснял эти термины как искаженные переводы термина alogos. Это слово можно перевести не только как "невыразимое", но и как "не-отношение". По-видимому, первоначально это слово было переведено в его втором значении словами irrelato и irrelatum, которые впоследствии потеряли приставку ir-.

От итальянских алгебраистов, которые, следуя арабам, называли неизвестную величину "вещью" (cosa), алгебра попала в Германию, где ее стали называть Coss - от итальянского слова cosa, поэтому немецких алгебраистов той эпохи называют коссистами. Как и итальянские алгебраисты, коссисты пользовались мультипликативной системой названий степеней. Они называли неизвестную величину Res ("вещь" на латыни), квадрат - Zensus, куб - Cubus, 4-ю степень - Zensus Zensi, 5-ю - Sursolidum, 6-ю Zensus Cubi, 7-ю - Bissursolidum и далее все "невыразимые" степни - словом sursolidum с добавлением сокращений латинских числительных ter-, quadr-, quint- и т. д. Слово sursolidum первоначально имело вид surdesolidum, от латинских слов surdus - "глухой", которым часто переводили греческое слово alogos (в частности, для обозначения иррациональных величин и чисел), слово solidum - "тело" появилось, по-видимому, по аналогии со словом "куб". Впоследствии слово sursolidum стали понимать как “сверхтело” и в латинских текстах заменять его словом supersolidum.

Эта “гипергеометрическая” терминология привела самого крупного коссиста Михаэля Штифеля (1487-1567) к идее многомерного пространства. В своей обработке книги “Coss” Христофа Рудольфа Штифель предложил “выйти за пределы куба” и, называя куб “телесной точкой”, рассматривать далее “телесную линию”, “телесный квадрат”, “телесный куб” и т. д.

Сферическая геометрия и тригонометрия в Европе

В моей книге “История неевклидовой геометрии” я подробно рассмотрел историю сферической геометрии и тригонометрии в Европе.

Теорему косинусов сферической тригонометрии, которая в трудах индийских и арабских астрономов встречалась только в астрономических правилах, впервые сформулировал как математическую теорему Региомонтан (1436 -1476) в “Пяти книгах о треугольниках всякого рода”. Чертеж Региомонтана к этой теореме совпадает с чертежом ал-Баттани в его астрономических таблицах. Поэтому европейцы приписывали эту теорему ал-Баттани и называли ее “теоремой Альбатегния”. Эта теорема для сферического треугольника ABC со сторонами a, b, c выражается формулой $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Двойственную терему косинусов, выражаемую для того же сферического треугольника формулой

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

впервые доказал Франсуа Виет (1548-1603) в его “VIII книге ответов на различные математические вопросы”.

Площадь сферического треугольника ABC, выражаемая формулой

$$S = r^2(A+B+C-\pi),$$

где углы A, B и C выражены в радианной мере, нашел Альбер Жирар (1595-1632) в работе “О мере поверхности сферических треугольников и многоугольников”.

Далее в “Истории неевклидовой геометрии” я рассматривал работы по сферической тригонометрии Леонарда Эйлера (1707-1783) и математиков его школы.

Поверхности второго порядка

Выше мы упоминали, что Архимед сжигал римские корабли используя свойства параболоида вращения. Он определил параболоиды и эллипсоиды вращения и полости двуполостных гиперболоидов вращения в трактате “О сфероидах и коноидах", где называл эллипсоиды вращения сфероидами, параболоиды вращения – прямоугольными коноидами, а полости гиперболоидов вращения – тупоугольными коноидами. Однополостные гиперболоиды вращения впервые рассматривал Дж. Валлис (1616 -1703), который называл их цилиндроидами.

В статье о геометрических работах Эйлера я изучал вопрос об открытии Эйлером поверхностей второго порядка общего вида . Эйлер рассматривал поверхности второго порядка, получаемые сжатием из поверхностей вращения, и гиперболический параболоид, который нельзя получить таким образом. Эти поверхности были впервые описаны Эйлером во 2-м томе "Введения в анализ бесконечных".

Современные названия этих поверхностей были предложены Гаспаром Монжем (1746-1818).

Теория параллельных линий в Европе и неевклидова геометрия

В "Истории неевклидовой геометрии" я подробно рассматривал попытки доказательств V постулата Евклида европейскими математиками, из которых отмечу доказательства математиков XIV в. Леви бен Гершона из Монпелье и Альфонсо из Вальядолида, написанные на иврите под несомненным влиянием арабских трактатов Ибн ал-Хайсама, и доказательство Джона Валлиса на основе явно сформулированного им постулата о том, что для всякой фигуры можно построить подобную фигуру любых размеров.

В той же книге я изложил историю открытия гиперболической геометрии Карлом Фридрихпм Гауссом (1777 -1855), Николаем Ивановичем Лобачевским (1792 -1856) и Яношем Бойяи (1802-1869), историю интерпретаций этой геометрии Эудженио Бельтрами (1835-1900), Феликсом Клейном (1849-1925) и Анри Пуанкаре (1854 - 1912) и историю развития эллиптической геометрии в работах Бернгарда Римана (1826-1866), Вильяма Кингдона Клиффорда (1845-1879) и Ф.Клейна, а также историю обобщений этих геометрий.

Лобачевский обнаружил связь между тригонометрией в открытом им пространстве и сферической тригонометрией. Он придавал этой связи очень важное значение, так как видел в ней доказательство непротиворечивости открытой им геометрии. Я специально исследовал этот вопрос и установил, что причина связи состоит в том,что гиперболическая геометрия имеет место на сфере мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве.

Геометрические преобразования в Европе

В "Истории неевклидовой геометрии" я подробно рассматривал историю геометрических преобразований в Европе – развитие проективной геометрии в трудах Жирара Дезарга (1591 -1661),Блеза Паскаля (1623 - 1662), Исаака Ньютона (1643 -1727), Жана Виктора Понселе(1788 -1867), Августа Фердинанта Мебиуса (1790 -1868), развитие аффинной геометрии в трудах Алексиса Клода Клеро (1713-1765), Л.Эйлера и А.Ф.Мебиуса, развитие конформной геометрии в трудах Л.Эйлера, Жана Лерона Даламбера(1717 -1783), Мебиуса, Жозефа Лиувилля (1809 - 1882).

Я рассмотрел также “Эрлангенскую программу” Ф.Клейна, согласно которой всякая геометрия определяется своей группой преобразований, и “Теорию групп преобразований” Софуса Ли (1842 - 1899), в которой было основано учение о группах Ли.

В научной биографии Эли Картана (1869 - 1951) я подробно изучал развитие теории групп Ли и связанных с ней теории симметрических Римановых пространств и пространств аффинной связности, а также других обобщенных пространств.

Геометрическая алгебра в Европе и многомерная геометрия

В “Истории неевклидовой геометрии” я рассмотрел различные виды геометрической алгебры европейских математиков. Это, прежде всего, исчисление треугольников в “Первых замечаниях к видовой логистике” Ф.Виета, оказавшее сильное влияние на возникновение аналитической геометрии Пьера Ферма (1601-1665).

К геометрической алгебре относится исчисление отрезков Рене Декарта (1596-1650), связанное с его аналитической геометрией.

Дальнейшим развитием принципов геометрической алгебры была идея Готфрида Вильгельма Лейбница (1646-1716) о “геометрии положения”, оказавшая исключительное влияние на появление и развитие топологии в работах Эйлера, Римана и Пуанкаре, на развитие проективной геометрии в работах Лазара Карно (1753-1823) и Христиана фон Штаудта (1798-1867) на возникновение векторной алгебры и многомерной геометрии в “Учении о протяжении” Германа Грассмана (1809-1877).

Другими направлениями развития геометрической алгебры были теория Симона Стевина (1548-1620) сложения сил в механике и алгебра векторов и кватернионов у Вильяма Роуана Гамильтона (1805-1865).

В той же книге я проследил возникновение и развитие многомерной геометрии. В неявном виде эта геометрия появилась еще в работах Михаэля Васильевича Остроградского (1801-1862) и Карла Густава Якоба Якоби (1804-1851) о кратных интегралах. Таким образом, Остроградский, который не понял открытия Лобачевского и написал отрицательный отзыв на его первую публикацию, сам оказался причастным к расширению понятия о пространстве. Я рассмотрел работы Грассмана, Людвига Шлефли (1814-1895) и Германа Вейля (1885-1955) по многомерной евклидовой геометрии, работу Римана, в которой была основана многомерная геометрия искривленного пространства, его заметку о многомерной топологии, идеи которой развили его друг Энрико Бетти (1823-1892) и Пуанкаре, который основал геометрию многомерных многообразий и комбинаторную топологию. Риман и Пуанкаре называли топологию Analysis situs, слово “топология” – перевод этого термина с латинского на греческий язык.

Я изучал также историю бесконечномерной геометрии, основанную Сальваторе Пинкерле (1853–1936) и Давидом Гильбертом (1862–1943), которые рассматривали в качестве точек и векторов бесконечномерных пространств функции. Замечу, что русский математик Владимир Андреевич Стеклов, который бурно протестовал против многомерной геометрии Римана, в своих работах об “ортогональных функциях” фактически пользовался бесконечномерным пространством Гильберта. Геометрия гильбертова пространства широко применяется в квантовой механике.

Группы вращений гиперсфер в гильбертовых пространствах некомпактны, как и сами эти гиперсферы. Я несколько раз упоминал унитарные представления некомпактных простых групп Ли, определенные Израилем Моисеевича Гельфандом (р. 1913) и его сотрудниками и Хариш – Чандрой (1923–1983). Эти представления являются гомоморфными отображениями некомпактных простых групп Ли в группы вращений гиперсфер комплексных гильбертовых пространств.

Глава 3

СИММЕТРИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ

Симметрии, двойственность и тройственность

В главе “Пространства и группы” я упоминал принцип двойственности проективной геометрии и обобщения этого принципа, предложенные Э.Картаном, в том числе принцип тройственности, а также группы, которые И.М.Гельфанд предложил называть двойственными и тройственными по Картану. Обобщения принципа двойственности, предложенные Картаном, связаны с двусторонней и трехсторонней симметриями диаграмм Дынкина соответственных групп Ли.

Многие мои работы, начиная с докторской диссертации и работы 1949 г., помещенной в сборнике моих переводов работ Картана, посвящены образам симметрии различных пространств, образующим модели симметрических пространств Картана, определяемых двусторонними симметриями. Образы симметрии различных пространств изучались и многими моими учениками. В моей книге 2003г. совместной с М.П. Замаховским рассматриваются обобщения симметрических пространств, называемые периодическими пространствами. Эти пространства определяются k-сторонними симметриями при k >2.

Симметрии привлекали внимание математиков и философов еще в древности. Правильные многогранники, обладающие максимальной симметрией, были открыты пифагорейцами и играли особую роль в философии Платона, вследствие чего их часто называют “платоновыми телами”. Платон считал, что атомы четырех греческих элементов имеют форму четырех правильных многогранников: атомы огня имеют форму правильного тетраэдра, атомы воздуха - форму октаэдра, атомы воды - форму икосаэдра, а атомы земли - форму куба. Форму пятого правильного многогранника - додекаэдра по мнению Платона имеет мир в целом, а на 12 гранях этого додекаэдра по его мнению изображены 12 знаков зодиака. Группа симметрии тетраэдра состоит из 24 элементов, группы симметрии октаэдра и куба - из 48 элементов, группы симметрии икосаэдра и додекаэдра - из 120 элементов.

Великий математик первой половины XX века Герман Вейль в своей книге “Симметрия” отметил, что изображения божеств, святых и священных животных в ассиро-вавилонском, древнегреческом, римском и средневековом искусстве всегда симметричны. Симметрия этих изображений указывает на то, что их авторы ощущали глубокую связь между божественным и симметричным.

Двойственность у пифагорейцев

Пары противоположных свойств играли важную роль в философии пифагорейцев. Аристотель писал о них в своей "Метафизике": "Пифагорейцы утверждают,что имеется десять начал, расположенных попарно: предел и беспредельное, нечетное и четное, единое и множество, правое и левое, мужское и женское, покоящееся и движущееся, прямое и кривое, свет и тьма, хорошее и дурное, квадратное и продолговатое".

Из этих пар противополижностей 1-я, 4-я,7-я и 10-я пары относятся к геометрии, 2-я и 3-я - к арифметике, 5-я - к биологии, 6-я - к механике, 8-я - к физике, 9-я - к этике. Пифагорейцы рассматривали все эти пары противоположностей вместе потому, что они не выделяли отдельных наук из единой универсальной науки.

В каждой паре противоположностей первую пифагорейцы считали совершенной, а вторую - несовершенной.

Пифагорейцы отождествляли единицы не только с точками, но и с душами неродившихся или умерших людей, а вещи, в том числе тела людей, отождествлялись с числами, поэтому пифагорейская пара противоположностей "единое и множество" по существу совпадает с парой "душа и тело".

Пара противоположностей "единое и множество" - такая же древняя, как пара "душа и тело". Первоначально это были два первых числа, впоследствии второе из этих двух "чисел" превратилось в число 2, и "чисел" стало три - 1, 2 и "много". Затем это новое "много" превратилось в число 3 и появился числовой ряд 1, 2, 3, 4, 5, 6, "много". Впоследствии и этот ряд расширился и последнее слово "много" превратилось в число 7. О том, что слово "семь" первоначально обозначало неопределенно большое количество, свидетельствуют русские пословицы "семь бед - один ответ", "у семи нянек дитя без глаза", "один с сошкой - семеро с ложкой", "семь раз отмерь, один раз отрежь". Позже такими числами, названия которых прежде обозначали неопределенно большое количество, стали 12 и 40. Числа 2, 3, 7, 12 и 40 и позже сохранили мистический характер, этим объясняется особая роль этих чисел во многих религиях и культурах.

Среди 7 "планет" древности - Солнца, Луны и пяти планет - имеются две пары, соответствующие пифагорейским противоположностям: Солнце и Луна, соответствующие "свету и тьме" и Марс и Венера, соответствующие "мужскому и женскому", которые часто обозначаются знаками этих планет. Если из 7 "планет" удалить эти две пары, мы получим "античную троицу" - отца - Кроноса-Сатурна, сына- Зевса-Юпитера и вестника богов - Гермеса-Меркурия. Античная троица значительно ближе к христианской, чем индийская троица Брахма - Вишну - Шива.

Симметричная и асимметричная двойственность

Из десяти пар противоположностей пифагорейцев шесть пар - 1-я, 2-я 4-я, 5-я, 8-я и 9-я симметричны, а другие четыре пары - 3-я, 6-я, 7-я и 10-я асимметричны.

Симметричными и асимметричными бывают и другие двойственности. Например, принцип двойственности проективной геометрии и все принципы двойственности Картана совершенно симметричны, а “двойственность по Картану”, определенная Гельфандом, асимметрична. Асимметрична и двойственность между эллиптическим пространством с мнимым абсолютом и гиперболическим, псевдоэллиптическими и псевдогиперболическими пространствами с вещественными абсолютами: группа движений эллиптического пространства компактна, а группы движений остальных пространств некомпактны. Асимметрична и двойственность между эллипсом и “парой противоположных гипербол”, которую подчеркивал Аполлоний, и между окружностью и равносторонней гиперболой, на которую мы обращали внимание, говоря об алгебраическом трактате Хайяма.

Симметричной является двойственность между замкнутыми и открытыми множествами в топологии, между операциями пересечения и объединения множеств в теории множеств, между конъюнкцией и дизъюнкцией в математической логике, и между аналогичными операциями во многих областях математики.

Примером двойственности в математике является сопоставление коммутативной группы и ее группы характеров. Характером коммутативной группы называется гомоморфное отображение этой группы в группу комплексных чисел единичного модуля. Характеры коммутативной группы сами образуют коммутативную группу. В случае конечных коммутативных групп группа характеров коммутативной группы G, как показал Г.Ф.Фробениус, изоморфна самой группе G и двойственнисть между группой и ее группой характеров симметрична. В случае бесконечных коммутативных групп группа G и ее группа характеров G* уже не изоморфны, но, как показал Л.С.Понтрягин, в случае, когда группа G компактна, группа G* дискретна, а в случае, когда группа G дискретна, группа G* компактна, и двойственность между компактными группами и их группами характеров асимметрична.

Двойственность в зороастризме и в учении “Инь-ян”

Пары противоположностей, аналогичные пифагорейским, имелись у персидских зороастрийцев и в китайском учении “Инь-ян” .

Религия зороастрийцев была основана на борьбе доброго бога Ахура-Мазды (Ормузда) и злого бога Ахгра-Майню (Ахримана). С этими богами были связаны противоположности “свет и тьма”, “Солнце и Луна”, “тепло и холод”, “добро и зло”.

Учение “Инь-ян”, на котором были основаны наука и образование в древнем и средневековом Китае, связано с противоположностями “солнечная погода и дождь”, “весна-лето и осень-зима”, “Солнце и Луна”, “свет и тьма”, “мужское и женское”, “положительное и отрицательное”, “небо и земля”.

Возможно, что между пифагорейцами и древними персами имелись связи; о связях между древними персами и китайцами мы упоминали в предыдущей главе. Двойственность зороастризма, несомненно, определила двойственность “отца диалектики” Гераклита, который учился у зороастрийских жрецов.

Двойственность в Библии

Первая книга Библии “Бытие” начинается такими словами: “В начале сотворил Бог небо и землю. Земля же была безвидна и пуста, и тьма над бездною; и Дух Божий носился над водою. И сказал Бог: да будет свет. И стал свет. И увидел Бог свет, что он хорош ; и отделил Бог свет от тьмы. И назвал Бог свет днем, а тьму ночью”. Мы видим, что согласно Библии сотворение мира было результатом воздействия Духа Божьего на материю, не имеющую формы - на воду. В результате появились противоположности - небо и земля, свет и тьма.

Далее, согласно Библии, Бог создал элементы, минералы, растения, животных.

В шестой день “сотворил Бог человека по образу Своему, по образу Божию сотворил его; мужчину и женщину сотворил их. . . И создал Господь Бог человека из праха земного, и вдул в лице его дыхание жизни, и стал человек душею живою”.

Сотворяя человека Бог создал еще две противоположности - душу и тело, мужчину и женщину - Адама и Еву.

Двойственность у Платона

Вселенная Платона состояла из трех миров: 1) мира “идей”, 2)“пространства”, 3) мира “рожденных”. Платон писал в “Тимее” : “Приходится признать во-первых, что есть тождественная идея, не рожденная и не гибнущая, ничего не воспринимающая в себя откуда бы то ни было и сама ни во что не входящая, незримая и никак иначе не ощущаемая, но отданная на попечение мысли. Во-вторых, есть нечто подобное этой идее и носящее то же имя - ощутимое, рожденное, вечно движущееся, возникающее в некоем месте и вновь из него исчезающее, и оно воспринимается посредством мнения, соединенного с ощущением. Втретьих, есть еще один род, а именно пространство: оно вечно, не приемлет разрушения, дарует обитель всему рождающемуся,но самовоспринимается вне ощущения, посредством некоего незаконного умозаключения, и поверить в него почти невозможно. Мы видим его как бы в грезах и утверждаем, будто этому бытию непременно должно быть где-то, в каком-то месте и занимать какое-то пространство, а то, что не находится ни на земле, ни на небесах, будто бы и не существует".

Эти слова показывают. что Платон считал "идеи" вечными сущностями, "рожденные" - сущностями, которые возникают и исчезают, а "пространство" - пассивная масса, которая под действием "идей" порождает "рожденные". Платон называл "пространство" также "матерью рожденных ", отождествляя противоположность между "идеями" и "пространством" с парой противоположностей "мужское и женское" и подчеркивая тем самым активный, мужской характер "идей".

Двойственность у Аристотеля

Учение Платона об активных "идеях" и пассивном "пространстве" было развито Аристотелем, который писал в "Метафизике":"Существует ли что нибудь помимо составного, целого или нет (я имею в виду материю и то, что с ней соединено)? Если не существует, то ведь все имеющееся в материи поистине преходяще. А если существует, то это будет, надо полагать, форма, или образ. Так вот, в каких случаях она существует отдельно и в каких нет, это трудно определить, ибо в некоторых случаях ясно, что форма не существует отдельно, например у дома." В другом месте "Метафизики" Аристотель писал: "материя есть носитель энтелехии ".

Аристотель называл пассивное "пространство" Платона "материей" (hyle), а его активную "идею" - "формой" (morphe). Под словом "энтелехия" (entelecheia) он понимал устойчивость (английский переводчик "Метафизики"перевел это слово actuality). Аристотель применял термин entelecheia в весьма широком смысле, относя его к любому виду материи, как и слова kinesis - "движение" и energeia - "энергия". Иногда Аристотель применял термин entelecheia и в смысле того, что обеспечивает устойчивость, например, в сочинении "О душе" он называет этим термином человеческую душу.

Идеи Платона и Аристотеля получили дальнейшее развитие в трудах Зенона Китийского и других стоиков. Стоики объединяли античные элементы воду и землю в понятие hyle - "материя", а огонь и воздух - в понятие pneuma - "дыхание, дух". Pneuma стоиков очень близка к "форме" Аристотеля.

Двойственнисть и тройственность в христианстве

Новый Завет унаследовал от Ветхого Завета идею единого Бога, но дополнил его до Троицы, к Богу-отцу были добавлены Бог-сын и Святой дух. Двойственными элементами в христианстве являются Бог и дьявол, рай и ада, добро и зло; к раю и аду был добавлен третий элемент – чистилище. Добро и зло находятся в человеческой душе и тем самым древняя асимметрическая двойственность души и тела дополняется симметричной двойственностью добра и зла.

Двойственность в исламе

Мусульмане рассматривают свою священную книгу Каран как продолжение Библии и Евангелия. Это подчеркивается тем, что мусульмане считают основателя своей религии Мухаммада (Магомета) шестым пророком после Адама, Нуха (Ноя), Ибрагима (Абраама), Мусы (Моисея) и Исы (Иисуса Христа).

Ислам унаследовал у христианства учение о едином Боге (Аллахе) и дьяволе (Шайтане), учение о рае и аде и понятия добра и зла.

Омар Хайям писал о рае и аде:

Нам с гуриями рай сулят на свете том
И чаши полные пурпуровым вином.
Красавиц и вина бежать на свете этом
Разумно ль, если к ним мы все равно придем.
Нам говорят муллы, что существует ад.
Поверьте мне: они неправду говорят.
Будь предназначен он для пьяниц и влюбленных,
Давно бы опустел цветущий райский сад.

В "Трактате о бытии и долженствовании" Хайям рассматривает вопрос о необходимости зла в мире.

Двойственность в буддизме

Буддизм, который в настоящее время является самой распространенной религией в мире, первоначально был не религией, а философским учением. По этой причине буддизм – единственная религия, в которой отсутствуют понятия Бога, идеи загробного мира и бессмертия души. Буддизм был основан в Индии, но затем вытеснен индуизмом и получил распространение сначала в Персии и Средней Азии, откуда по "Великому шелковому пути" попал в Китай. В Персии и Средней Азии буддизм сосуществовал вместе с зороастризмом, после арабского завоевания обе религии были вытеснены исламом. Из Китая буддизм попал в Корею, Японию, Индокитай, где буддизм также сосуществовал с другими религиями, а также в Тибет, Монголию, Туву, Бурятию и Калмыкию, где буддизм стал основной религией.

Буддистские монастыри – "вихары" послужили образцом для мусульманских медресе, по образцу которых были созданы средневековые европейские университеты.

Буддисты заимствовали из древней индийской науки понятие “дхармы” – атома пространства, аналогичное понятиям античных атомистов и средневековых мутазилитов и превратили его в понятие элементов чувственного восприятия мира. Буддистская “дхарма” представляет собой единство физического и психического, вследствие чего буддисты отождествляют реальные предметы с ощущениями этих предметов. Крупнейший знаток индийской философии Федор Ипполитович Щербатской в книге “Центральная концепция буддизма и смысл слова дхарма” отмечал совпадение этой концепции буддистов с “новейшим позитивизмом” Э.Маха. Двойственность понятия дхармы является важнейшей особенностью буддизма.

Двойственность у Декарта

Учение Платона о том, что “рожденные”, т.е. вещи, являются результатом воздействия “идей” на “пространство” получило развитие в “Принципах философии” Рене Декарта. Декарт также считал, что пространство совпадает с пассивной материей и пустого пространства не может быть. Роль платоновских “идей” у Декарта играют “души”. Взаимодействие “душ” на пространство, по мнению Декарта, порождает вихри, определяющие движение устойчивых явлений.

Двойственность у Ньютона

Хотя название главного труда Исаака Ньютона “Математические принципы натуральной философии” очень близко к названию упомянутой книги Декарта, понятие пространства у Ньютона было совершенно противоположно понятию Декарта. Ньютон считал пространство “абсолютным”и совершенно независимым от материи. В “Математических принципах” Ньютон, основываясь на работах Кеплера и Галилея, разработал основы классической механики, общие для земных и небесных явлений. Поэтому Ньютон заменил три мира Аристотеля – физический, математический и божественный – двумя – физическим и божественным.

В своем 1-м законе механики Ньютон показал, что пифагорейская пара противоположностей “покоящееся и движущееся” должна быть заменена парой “движущееся по инерции и движущееся с ускорением”. 2-й закон Ньютона связан с парой противоположностей “сила и ускорение”. 3-й закон Ньютона связан с парой противоположностей “действие и противодействие”. Одновременно с Г.В.Лейбницем Ньютон создал дифференциальное и интегральное исчисления, являющиеся математическим аппаратом классической механики.

Ньютон интересовался не только физическим миром, божественный мир интересовал его не меньше физического. Кроме сочинений по математике, механике и физике, Ньютон был автором многих сочинений по теологии, истории и алхимии. Труды Ньютона по алхимии изучала Бетти

Джо Доббс, с которой я беседовал во время конгресса историков науки в Эдинбурге. Она писала, что в этих трудах Ньютон рассматривал "активный животворный алхимический агент", способный оживлять мертвую материю, который он, следуя алхимикам, называл "магнезией". Воздействие "магнезии" на материю аналогично действию на нее "формы" Аристотеля и "пневмы" стоиков.

Двойственность у Лейбница

Хотя математические работы Готфрида Вильгельма Лейбница были близки к работам Ньютона, философские труды Лейбница были ближе к работам Декарта. В своих книгах "Монадология" и "Новые опыты о человеческом разуме" Лейбниц писал, что пространство подобно жидкой материи, и что оно подвергается воздействию "монад", подобных душам. Слово "монада" (monas) Лейбниц заимствовал у пифагорейцев, это слово по-гречески означает "edinica", а пифагорейцы отождествляли единицы с душами. По мнению Лейбница монады порождают "предустановленную гармонию".

В книге "Теодицея" Лейбниц рассматривал тот же вопрос о необходимости зла в мире, о котором писал Хайям в "Трактате о бытии и долженствовании".

Двойственность у Гегеля

Двойственность играла важную роль в философии Георга Вильгельма Фридриха Гегеля (1770-1831), который называл двойственность "диалектикой", от греческого названия искусства спора.Ту роль, которую в монотеистических религиях играет Бог, в философии Гегеля играла "Абсолютная идея", отождествляемая Гегелем с мировым разумом.

Устойчивое существование Гегель называл "действительностью" (Wirk-lichkeit). В предисловии к "Философии права" Гегель писал: "То, что действительно, разумно, а то, что разумно, действительно". Эти слова Гегеля означают, что устойчиво только то, в чем проявляется Абсолютная идея, и все, в чем она проявляется, устойчиво.

По мнению Гегеля, вся история природы и человеческого общества является историей преобразования Абсолютной идеи. Этот процесс, который Гегель назвал "диалектическим процессом", имеет вид "гегелевской триады", состоящей из тезиса, антитезиса и синтеза. Явления природы, развивающиеся по этому закону, всегда относятся к устойчивым явлениям и определяют естественные циклы. Классический пример: если зерно "отрицается" будучи посеянным, оно возродится в виде растения, которое принесет много зерен, если же его "отрицание" состоит в его раздавливании или в сожжении, никакого "синтеза" не произойдет.

Двойственность у позитивистов

Основатель “позитивной философии” Огюст Конт (1798–1857) называл теории, которые нельзя экспериментально проверить, “метафизикой”, считал подобно Лейбницу, пространство пассивной жидкой массой, и объяснял возникновение устойчивых материальных структур действием на них активных сил.

Эрнст Мах (1838–1916) рассматривал свою филисофскую систему как продолжение учения Конта и называл ее “новейшим позитивизмом”. Мах критиковал учение Ньютона об “абсолютном пространстве и инерции”. Эта критика сыграла важную роль в создании теории относительности Эйнштейна.

В учении Маха о “физико-психических элементах”, т.е. о том, что предметы реального мира – не что иное, как наши ощущения, также имеется двойственность. Как я упоминал, Ф И.Щербатской установил, что учение о “физико-психических элементах” задолго до Маха развивалось буддистами, называвшими эти элементы “дхарма”.

Более поздний позитивист Анри Бергсон называл свою философскую систему “философией жизни”. В своей книге “Творческая эволюция” он писал: “Теория познания и теория жизни кажутся неразделимыми”. Эти слова показывают, что Бергсон понимал слово “жизнь” в весьма широком смысле – как результат действия творческих сил природы, которые он называл “духом”, на пассивную материю. Бергсон считал, что “жизнь” – не материя и не дух, каждое из которых является только “продуктом распада”, так что только соединение этих двух противоположностей может привести к “длительному существованию”, т.е. к устойчивости явлений.

Устойчивость

Я неоднократно упоминал слово “устойчивость”, обозначающее продолжительное существование, обеспечиваемое способностью сопротивляться изменениям. Сопротивление изменениям бывает двух видов: таким, которое можно назвать статической устойчивостью или “устийчивостью дуба” и таким, которое можно назвать динамической устойчивостью или “устойчивость тростника”. В первом случае явление просто не поддается изменениям, во втором случае, напротив, легко поддается, но после прекращения внешнего воздействия возвращается в свое прежнее состояние.

В механике этим двум видам устойчивости соответствуют два вида устойчивости движения – устойчивость по Ляпунову, при которой малым изменениям начальных условий соответствуют малые изменения системы в любой момент, и устойчивость по Пуассону, при которой система возвращается к своему прежнему состоянию после прекращения внешнего воздействия. В первом случае говорят, что система обладает инерцией, во втором случае – система обладает упругостью.

В главе “Армия” я писал, что в 1944 г., когда я был военным радистом, я размышлял о гармонических колебаниях, и пришел к выводу, что особенно устойчивы такие динамические системы, которые: обладают и инерцией и упругостью. Так как к таким явлениям относятся системы, движение которых называется гармоническим колебанием, будем называть устойчивость таких систем гармонической устойчивостью.

К гармонически устойчивым явлениям относятся, упоминавшиеся мной, механические осцилляторы, электромагнитные колебательные контуры и атомы водорода,являющиеся соединениями “коллекторов” и ”рефлекторов”.

Устойчивость и двойственность

Все религии и философские системы, которые мы рассмотрели, ставят вопрос об устойчивости явлений и объясняют причины этой устойчивости. Во всех случаях устойчивость оказывается связанной с различными видами двойственности Наиболее наглядна эта связь в представлении о живом существе как о соединении души с телом. Таковы же платоновские “рожденные”, являющиеся результатом воздействия “идей” на “пространство” и аристотелевская “энтелехия”, являющаяся результатом воздействия “формы” на пассивную материю. Таковы же устойчивые явления, являющиеся результатом воздействия на материю “пневмы” стоиков, “душ” Декарта, “магнезии” Ньютона и “монад” Лейбница. Такова же “действительность” Гегеля, являющаяся результатом воздействия “Абсолютной идеи” на материю.

Аналогична и гармоническая устойчивость, возникающая в результате соединения “коллектора” и “рефлектора”. Будем, следуя Аристотелю, понимать слова “движение” и “энергия” в широком смысле, относя их не только к механике, физике или химии, но к любому виду материи. В таком же широком смысле будем понимать слова “коллектор” и “рефлектор”. Поэтому будем называть гармонически устойчивым явлением такую материальную систему, которая является соединением “коллектора” и “рефлектора”в этом широком смысле. ”Коллектор” обладает свойством накапливать энергию, а “рефлектор”– возвращать ее обратно в “коллектор” Благодаря инерциии системы “рефлектор” при превращении накопленной энергии в энергию движения, не даст ей рассеяться в пространстве и таким образом движение системы воспроизведется снова.

Двойственность без устойчивости

Имеется только одна философская система, которая не ставит вопроса об устойчивости материальных структур и причинах этой устойчивости. Этой философской системой является марксизм.

Основатели марксизма Карл Маркс и Фридрих Энгельс не считали свои взгляды философской системой и, напротив, противопоставляли их философским системам. Маркс в “Тезисах о Фейербахе“ писал, что философы пытаются объяснить мир, но дело состоит в том, чтобы изменить его.

Первоначально Маркс и Энгельс были гегельянцами. Став материалистами они отказались от гегелевской Абсоютной идеи, но сохранили некоторые остатки учения Гегеля о диалектическом процессе, вследствие чего их материализм стали называть “диалектическим материализмом”. Из учения Гегеля Маркс и Энгельс заимствовали три “закона диалектики” – закон единства и борьбы противоположностей, закон перехода количества в качество и закон отрицания отрицания, который совпадалетс “гегелевской триадой”.

В XX веке появилось выражение “философия марксизма”. П.С.Юшкевич назвал сборник статей, вышедший под его редакцией, “Очерками по философии марксизма”.

В СССР марксизм стал официальной философией, которую должны были изучать студенты и аспиранты всех специальностей. Основатель Советского государства В.И.Ленин и “вождь народов” И.В.Сталин были объявлены “классиками марксизма”. Учение Маркса стало теоретической основой “пролетарских революций”, “диктатуры пролетариата” и экспансии коммунизма на весь мир.

И.В. Сталин в 1938 г. в “Кратком курсе истории ВКП(б)” заменил “три закона диалектики” “четырьмя характерными чертами” диалектического метода”, две из которых совпадают с первыми двумя “законами”, а две другие– “всеобщая связь” и “постоянное движение” были заимствованы из книги Н.И.Бухарина “Исторический материализм”.

А.И.Солженицын в романе “В круге первом” описывает спор между марксистом Львом Рубиным и националистом Дмитрием Сологдиным, о том всегда ли имеет место закон отрицания отрицания. Рубин не смог ответить на этот вопрос, но я упоминал, что гегелевская триада имеет место не всегда, а только в случае устойчивых явлений. Видимо, именно из за того, что этот закон не является универсальным, он не был включен в число “характарных черт” диалектического метода. Так Сталин расправися с “остатком” гегелевской теории устойчивости явлений.

Отсутствие теории устойчивости в марксизме было одной из причин распада СССР и краха “всесильного учения”.

Хотя в самом марксизме теория устойчивости отсутствовала, попытки ее создания имелись у марксистских “еретиков”: в “Тектологии – всеобщей организационной науке” А.А.Богданова,в “теории равновесия” Н.И.Бухарина в трудах “меньшевиствующего идеалиста” А.М.Деборина и в “Судьбах марксизма в России” А.Н.Яковлева.

Устойчивость и двойственность в механике

Если механическая система характеризуется n обобщенными координатами q_i (i = 1, 2, . . .n) и обобщенными импульсами p_i , то движение системы определяется каноническими уравнениями В.Р.Гамильтона

$$dq_i /dt = \partial H/\partial p_i , \quad dp_i/dt = - \partial H/\partial q_i , \quad (1)$$

где H – функция Гамильтона равная сумме T+U кинетической и потенциальной энергии системы.

В общем случае кинетическая энергия системы T является квадратичной формой $T=- \sum A_{ij}p_ip_j$ импульсов, а потенциальная энергия системы U является произвольной функцией координат q_i. Особенно важен частный случай, когда U также является квадратичной формой координат $U=\sum C_{ij}q_iq_j$. В этом случае, если p и q – векторы n–мерного пространства с координатами p_i и q_i , а A и C – линейные операторы того же пространства с матрицами (A_{ij}) и (C_{ij}), уравнения (1) принимают вид

$$dq/dt = -Ap, \quad dp/dt = - Cq. \qquad (2)$$

Уравнения (2) эквивалентны векторному уравнению

$$d^2q/dt^2 + W^2q =0, \text{ где } W^2 = AC. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) можно записать в вид

$$q = (\cos Wt)q_0 + W^{-1}(\sin Wt)(dq/dt)_0 , \quad (4)$$

где синус и косинус операторного переменного определяются такими же рядами, как и синус и косинус вещественного переменного. Формула (4) показывает, что механическая система, удовлетворяющая указанному условию, эквивалентна n гармоническим осцилляторам.

В случае одного гармонического осциллятора,состоящего из упругой пружины и инертной массы, n=1 и роль векторов q и p и линейных операторов A, C и W играют вещественные числа, и движение системы является периодическим. В общем случае движение системы является почти периодическим. Таким образом случаю полной двойственности функций T и U соответствует устойчивое движение системы.

В реальных условиях часть энергии механической системы рассеивается в пространстве и через некоторое время ее движение прекратится, но если в такт колебаниям системы восполнять рассеивающуюся энергию, движение может быть сколь угодно долгим.

В общем случае гармонической механической системы ее “коллектор” определяется линейным оператором C, а “рефлектор” – линейным оператором A. Двойственность между “коллектором” и “рефлектором”, на которой основано гармоническое движение в механике, тесно связана с двойственностью между обобщенными координатами q_i и обобщенными импульсами p_i и между кинетической энергиейT и потенциальной энергией U Левые части уравнений Гамильтона (1) являются скоростями и силами. Поэтому указанная двойственность связана также с двойственностью между скоростями и силами и между кинематическими и динамическими винтами, к которым приводятся системы скоростей и сил.

В специальной теории относительности Эйнштейна пространство и время являются частями единого пространства-времени, и при переходе от одной инерциальной систены координат к другой пространственные и временные координаты выражаются друг через друга. В специальной теории относительности время рассматривается как 4-я координата, а энергия - как 4-я координата вектора импульса. Поэтому двойственность пространственных координат и координат импульсов и обобщенных координат и импульсов q_i и p_i следует дополнить двойственностью между временем и энергией. При этом,по-видимому, кинетической энергии соответствует настоящее время, а потенциальной энергии - прошедшее и будущее время. Прошедшее и будущее время сливаются, если перейти от обычного времени к циклическому.

Устойчиность и двойственность в электродинамике

Устойчивое движение электромагнитной системы определяется теми же уравнениями (2) и (3), что и устойчивое движение механической системы, где координаты q_i вектора q равны количествам электричества в элементах системы, координаты p_i вектора p равны электромагнитным импульсам в элементах системы, оператор A характеризует индуктивность системы, а оператор C - электрическую емкость системы.

При n=1 мы получаем электромагнитный осциллятор - замкнутый электромагнитный контур, в котором роль “коллектора” играет конденсатор,а роль “рефлектора“ - катушка самоиндукции. Пара противоположностей, определяющих устойчивость этой системы, - конденсатор и катушка самоидукции, - асимметрична, но конденсатор содержит симметричную пару противоположностей - пару обкладок, заряженных положительным и отрицательным электричеством.

Так как часть энергии электромагнитного осциллятора идет на согревание проводов цепи и рассеивается в пространстве, электрический ток в цепи осциллятора через некоторое время прекратится. Для продолжения колебаний осциллятора необходима подпитка его энергией в такт колебаниям. “Коллектор” и “рефлектор” гармонической электромагнитной системы общего вида имеют аналогичный характер и определяются, соответственно, линейными операторами C и A.

Устойчивость и двойственность а атомной физике

Выше я упоминал, что в простейшем атоме - атоме водорода роль “коллектора” играет позитроний, состоящий из электрона и позитрона, а роль “рефлектора” - нейтрон, соединенный с позитроном и образующий вместе с ним протон.Так как движение электрона можно рассматривать как электрический ток, атом водорода можно рассматривать как электромагнитный замкнутый контур, в котором позитроний играет роль конденсатора, а нейтрон - роль катушки самоиндукции. При этом электрон и позитрон могут попадаать внутрь нейтрона, и если одна из частиц, образующих позитроний, находится вне нейтрона, то другая из этих частиц находится внутри нейтрона.

В 1960-х годах М.Гелл-Манн установил, что внутри нейтрона находятся три “кварка”, один из которых имеет отрицательный электрический заряд равный 2/3 заряда электрона, а каждый из двух остальных кварков имеет положительный электрический заряд равный 1/3 заряда позитрона. Так как нейтрон играет роль катушки самоиндукции электромагнитного осциллятора, кварки играют роль сердечников катушек самоиндукции .

Движение электрона и позитрона в атоме водорода происходит следующим образом. Электрон притягивается к нейтрону, в центре которого находится позитрон, падает на нейтрон, входит внутрь его и движется по винтовой линии на поверхности первого кварка к центру нейтрона, а позитрон движется по винтовым линиям на поверхностям двух других кварков,выходит из нейтрона и доходит до положения симметричного первоначальному положению электрона относительно центра нейтрона. Далее позитрон падает на нейтрон,входит внутрь его и движется к его центру по винтовым линиям на поверхностях двух кварков, а электрон движется по винтовой линии на поверхности первого кварка, выходит из нейтрона и движется к своему первоначальному положению, после чего движения электрона и позитрона продолжается таким же образом снова. Дробные электрические заряды кварков объясняются тем, что эти значения являются средними арифметическими для многих циклов.

В атомной физике положения частиц и значения физических величин определяются иначе, чем в классической физике: с каждой частицей в атомной физике связана комплексная волновая функция $\psi(x,y,z,t)$ пространственных координат и времени, которую можно рассматривать как вектор комплексного гильбертова пространства, а с каждой физической величиной - самосопряженный линейный оператор A этого пространства, причем вероятность нахождения частицы в некоторой области пространства - времени и вероятность того, что значение физической величины находится в некоторой области этих значений равны интегралам от квадрата модуля $|\psi|$ вектора ψ или от эрмитовой формы равной скалярному произведению векторов ψ и $A\psi$ по указанным областям. С количеством электричества электрона или позитрона связано произведение волновой функции этой частицы на величину q заряда этой частицы, а сила тока, определяемого движением этой частицы, выражается вещественной частью частной производной соответственной волновой функции qy по времени.

Волновая функция, определяющая электрон атома водорода в случае, когда энергия позитрония, входящего в состав этого атома, равна E, удовлетворяет уравнению Шредингера

$$(h/2\pi)i\partial\psi/\partial t = E\psi, \qquad (5)$$

где h – константа Планка, имеющая размерность действия,т.е. произведения энергии на время. Линейный оператор, стоящий в левой части этого уравнения, определяет энергию системы, а E – собственное значение этого оператора. Если представить функцию ψ в виде $\psi_1+i\psi_2$, где ψ_1 и ψ_2 – вещественные функции, то комплексное уравнение (5) можно переписать в виде системы двух вещественных уравнений

$$(h/2\pi)\partial\psi_1/\partial t = E\psi_2\,, \quad (h/2p)\partial\psi_2/\partial t = -E\psi_1 \qquad (6)$$

того же вида, что система (2). Уравнения (6) равносильны уравнению

$$(h/2\pi)^2\partial^2\psi_1/\partial t^2 + E2\psi_1 = 0, \quad (7)$$

решение которого имеет вид

$$\psi_1 = (\cos\,(2\pi Et/h))\,(\psi_1)_0 + (\sin\,(2\pi Et/h))\,(\partial\psi_1/\partial t)_0\,. \qquad (8)$$

Функция (8) является периодической с периодом T=h/E, т.е. частота n = 1/T переменного тока в атоме водорода связана с энергией E соотношением E = hn . последнее соотношение совпадает с формулой Планка, связывающей энергию E кванта света с частотой n этого света.

Линейные операторы, отличающиеся от оператора, стоящего в левой части уравнения (5) заменой временной координаты t на пространственные координаты x,y,z, определяют соответственные координаты вектора импульса. Позитроний и нейтрон образуют асимметричную пару противоположностей, а позитрон и электрон в позитронии – симметричную пару. Греческое слово atomos – “неделимый” является аналогом латинского слова individuum. Человеческий индивидуум в религиозных представлениях, как и атом водорода, состоит из двух ассимметричных противоположностей – тела и души, а в человеческой душе имеются симметричные противоположности, называемые добром и злом.

При движении электрона и позитрона в атоме водорода не происходит рассеивания энергии в пространстве, этим объясняется исключительная устойчивость атома водорода.

Атомы тяжелых элементов и молекулы являются соединениями атомов водорода, причем в атомах тяжелых элементов объединены нейтроны атомов водорода, а в молекулах – позитронии.

Если тяжелый атом является соединением N атомов водорода, то ядро этого атома содержит N нейтронов, а в состав этого атома входят n < N позитрониев. В частности, в случае атома гелия N=4, n=2 и при образовании атома гелия из 4 атомов водорода два позитрония аннигилируются и превращаются в кванты света. Такое образование атомов гелия, сопровождаемое выделением энергии происходит внутри Солнца и звезд и является причиной свечения этих небесных тел. На этом факте основана водородная атомная бомба.

Устоичивость и симметрии кристаллов и солитонов

Устойчивость кристаллов и солитонов (уединенных волн) также связана с их симметрией. В случае солитонов эта симметрия определяет интегрируемость дифференциальных уравнений, которые описывают их внутреннее движение.

Симметрия кристаллов связана с тем, что они заполняют некоторую область пространства. Разбиение пространства на одинаковые фигуры возможно только в том случае, когда эти фигуры обладают 3-сторонней, 4-сторонней или 6-сторонней симметрией, поэтому n-сторонняя симметрия кристаллов возможна только при n=3, 4 или 6.

Устойчивость и двойственность в механике и физике более подробно описаны в конце 6 главы моей книги "Геометрия групп Ли". Там же указана связь уравнений Гамильтона (1) с симплектической геометрией.

Устойчивость и двойственность в астрономии

Устойчивость Солнечной системы и других звездных систем, а также галактик и супергалактик объясняется аналогично устойчивости явлений механики и физики. О том, что Солнце является одной из звезд было известно еще со времен Джордано Бруно, но планеты, обращающиеся вокруг некототых звезд, были обнаружены только недавно.

С.П.Новиков в одной из своих работ о солитонах писал, что звездные системы и галактики следует рассматривать как гиганские солитоны.

Внутри звезд совершаются циклические процессы, о чем свидетельствует периодичность изменения солнечной активности: расстояния между максимумами этой активности равны 11-12 годам. Солнечная активность влияет на события на Земле, некоторые ученые считают, что вспышки этой активности вызывают эпидемии, а математик и экономист В.С.Джевонс связывал с ними экономические кризисы.

1917 год, в котором я родился, - год Февральской и Октябрьской революций в России - по "звериному циклу", календарей многих народов Востока, был "годом змеи". Так как "звериный цикл" состоит из 12 лет, другие "годы змеи" были: 1905 - год первой русской революции, 1929 - "год великого перелома", 1941 - год нападения Германии на СССР, 1953 - год смерти Сталина и государственного переворота в СССР. Следующий государственный переворот в СССР произошел через 11 лет в 1964 г. Трагические события этих лет также связаны с вспышками солнечной активности.

Роль "рефлектора"и "коллектора" в звездной системе играют звезда и ее гравитационное поле, в котором обращаются планеты и кометы.

Объединение звездных систем может быть двух видов: при объединении самих звезд получаются звезды большего размера, при объединении гравитационных полей звезд образуются галактики. Термин "галактика" происходит от греческого названия Млечного пути Galaxia, так как Млечный путь - та галактика в которую входит Солнечная система. Галактики также обладают внутренним движением и симметрией. Супергалактики являются объединениями галактик.

Устойчивость и двойственность в биологии

Замечательными устойчивыми явлениями природы являются живые существа. Все живые существа состоят из клеток. Каждая живая клетка состоит из ядра и цитоплазмы , клеточное ядро состоит из кариоплазмы и хроматина. Цитоплазма и кариоплазма образуют протоплазму. В живой клетке имеются частицы, называемые митохондриями, обладающие способностью накапливать энергию. Благодаря содержащейся в митохондриях аденозинной трифосфорной кислоте (АТК) энергия накапливается в образующихся в анаболических реакциях больших молекулах белков, жиров и углеводов. Эта энергия освобождается, когда большие молекулы в катаболических реакциях распадаются на молекулы воды, углекислоты и аммиака. Освободившаяся энергия используется для внутреннего движения клетки, и в результате этого движения снова накапливается в митохондриях. Хроматин, благодаря содержащейся в нем дезоксирибонуклеиновой кислоте (ДНК), обладает способностью сохранять генетическую информацию и регулировать внутреннее движение клетки.

В случае гармонической материальной структуры, являющейся живым существом или сообществом живых существ, будем называть “коллектор” этого явления его душой, “рефлектор” этого явления – его телом. “Душа” клетки состоит из митохондрий и хроматина, а “телом клетки” является ее протоплазма.

Появление жизни на Земле могло произойти при соединении двух органические веществ, одно из которых могло накапливать энергию, а другое – приводиться в движение этой энергией и возвращать ее в первое веществ.

Эрвин Шредингер в книге “Что такое жизнь с точки зрения физики” пытался объяснить, чем живая материя отличается от неживой материи. Как известно, неживая материя благодаря энтропии стремится перейти в состояние равновесия. Так как живая материя не переходит в состояние равновесия, Шредингер считал, что она обладает “отрицательной энтропией”. На самом деле никакой отрицательной энтропии не существует, и устойчивость живой клетки объясняется тем, что она является соединением “души” с “телом”.

Другой элементарной формой жизни являются вирусы. Вирус можно рассматривать как “душу” клетки без ее протоплазмы, или как часть такой “души“. Если вирус проникает в клетку, то он заменяет в хроматине клетки ее гены своими и превращает ее в клетку с другой “душой”.

Все вирусные заболевания человека являются результатом внедрения вирусов в клетки здорового человека.

Многоклеточные организмы являются объединениями клеток. При этом в организмах животных объединены “души” клеток, а в организмах растений объеденены их “тела”. “Душой” организма животного является нервная система, а “телом” – пищеварительная система и мускулатура. “Душой” организма растения являются корни, а “телом” – ствол и ветви.

Колебательный характер жизненных процессов животных и растений выражается в их различных биоритмах.

Многие животные и растения обладают двусторонней и многосторонней симметрией. Так как симметрия живых существ, в отличие от симметрии кристаллов, не связана с разбиением пространства на одинаковые фигуры, в случае n-сторонней симметрии живых существ число n не обязательно должно быть равным 3, 4 и 6, а может быть равно 5, 7, 8 и другим числам.

Следует отметить, что в случае животных и человека двусторонняя симметрия не является полной. В частности, правая и левая половины человеческого мозга обладают различными свойствами: левая половина мозга связяна с формальным, логическим мышлением, а правая – с воображением, интуицией и эмоциями. Поэтому в данном случае пара противоположностей “правое и левое” заменяется парой “воображение и логика”, которая в области математики приводит к паре “геометрия и алгебра”.

Сообществами живых организмов являются виды и популяции. В популяциях имеют место колебательные процессы типа зерно – растение – много зерен или яйцо – курица – много яиц.

Некоторые популяции типа пчелиных роев или муравейников, подобны живым организмам.

Устойчивость и двойственность в человеческом обществе

Элемент человеческого общества – семья – состоит из мужчины и женщины, роль которых аналогична роли позитрона и электрона в атоме водорода, и семейного хозяйства, роль которого аналогична роли нейтрона. Поэтому мужчина и женщина образуют “душу” семьи, а семейное хозяйство – “тело” семьи.

Связь между семьей и ее хозяйством (собственностью) очевидна из того, что во всех религиозных сектах от маздакитов в доисламском Иране до европейских сект, описанных И.Р.Шафаревичем в его книге о различных видах социализма, отмена собственности всегда сопровождалась ликвидацией семьи и введением общности жен. Такие же отмены частной собственности и семьи описаны Платоном в его книге “Государство” и Марксом и Энгельсом в “Коммунистическом манифесте”. На иврите слово “баал” означает и “хозяин” и “супруг”.

Человеческое общество является объединением семей. Имеется два типа объединения семей – образование “сверхсемей” и образование “сверххозяйств”. Первый способ объединения ближе к организации стаи животных, при этом способе объединения появлялись сначала племена, затем феодальные княжества, дальнейшее объединение которых приводило к абсолютным монархиям и империям. В этих сообществах вождь племени, феодал и монах рассматривались как отец племени, княжества или государства. Феодальное “право первой ночи”, несомненно, было пережитком тех времен, когда племенной вождь или феодал и в самом деле был отцом племени или княжества.

В феодальном обществе, как и во всяком человеческом обществе, имелись циклические процессы аналогичные процессам популяциях животных. Роль энергии в феодальном обществе играла родовитость, измеряемая древностью рода и, следовательно, количеством действительных или формальных потомков. “Душой”феодального общества была знать, дворянство и духовенство. “Тело” общества составляли крестьяне и ремесленники и орудия их производства.

Второй способ объединения семей – объединение их хозяйств в рыночной и капиталистической экономике. В капиталистическом обществе имеют место периодические кризисы и другие циклические процессы. Роль энергии в товарном и капиталистическом обществе играет труд, как в процессе производства так и в овеществленной форме – в виде товаров или денег. В первом случае труд играет роль кинетической энергии , а во втором – потенциальной энергии. “Душой” этого общества являются купцы, капиталисты, организаторы производства, инженеры, а “телом”– рабочие и машины. По мере развития этого общества удельный вес машин возрастает. Машины, механизмы и компьютеры выполняют все более сложные производственные операции и постепенно вытесняют людей из сферы производства. Возможно, что в будущем “тело” общества будет состоять только из машин и компьютеров со сложными программами.

Религия и духовенство особенно важную роль играли в феодальном обществе. Наиболее древние религии были тесно связаны с отношениями между полами. Религиозные обряды в этих религиях часто сопровождались распитием спиртных напитков, танцами храмовых танцовщиц .В Индии эти танцовщицы назывались баядерками и девадаши. В индийсих храмах жрецы производили дефлорацию девушек на статуях индуистских богов. В Библии упоминается разнузданность религиозных обрядов моавитян, и их попытки развратить некоторых сынов Израиля. С религиозными обрядами древних, несомненно, связаны представления мусульман о “рае с гуриями”, о котором писал Омар Хайям. Церковные обряды бракосочетания сохранились до сих пор.

В человеческом обществе иногда встречаются явления “социального вируса”, аналогичные вирусам в биологии. Эти явления состоят в том, что группа людей, достаточно большая, вторгается в некоторую страну, или действуя в своей стране, истребляет или подчиняет себе “душу” общества и занимает ее место. Так было при порабощении свободных народов европейскими колонизаторами. Так было в 1917 г. в России при захвате власти большевиками и в 1933 г. в Германии при приходе к власти нацистов.

Классическим примером “социального вируса” было завоевание Англии норманами из Нормандии во главе с Вильгельмом Завоевателем. Пришельцы говорили на французском языке. Вальтер Скотт в романе “Айвенго” красочно описал ситуацию в Англии после завоевания, когда новое дворянство говорило по-французски, а крестьяне были англосаксами. Поэтому до сих пор в английском языке живых свиней и быков, которых выращивали крестьяне, называют староанглийскими словами swine и ox, а свинину и говядину, которые ели дворянине,- французскими словами pork и beef.

И.Р.Шафаревич в своей "Руссофобии" отмечает, что процент евреев среди ученых, инженеров и вречей в СССР был значительно выше процента евреев по отношению к населению страны. Шафаревич не дал правильного объяснения этому факту. Он даже договорился до необходимости установления "процентной нормы " для евреев при приеме в вузы, подобной той, которая существовала в царской России.

Я считаю. что высокий процент ученых среди евреев объясняется тем, что евреи за время двухтысячелетних странствий из Палестины в Испанию, из Испании в Германию и из Германии в Польшу и Россию потеряли значительную часть своего народа, которая была истреблена или приняла ислам или христианство. На этом пути евреи превратились из "народа Книги" т.е. из народа Библии, в народ книги - уникальный народ, с чрезвычайно большим процентом интеллигенции.

Применение математики в биологии и экономике

До XX века применение математики в биологии и экономике было очень ограниченным. В настоящее время математические методы применяются в биологии и экономике все чаще. Попытка применить математику к биологическим наукам была еще у Л.Эйлера. В 1727 г. Эйлер двадцатилетним юношей приехал в С.Петербург, и не получив место в Математическом отделении Академии наук, стал адъюнктом Медицинского отделения Академии, где изучал кровообращение, применяя методы гидродинамики.

В первой половине XX века итальянский математик Вито Вольтерра выпустил "Лекции о математической теории борьбы за существование" , а американские ученые Альфред Лотка и Николас Рашевский опубликовали книги "Элементы физической биологии" и "Математическая биофизика. Физико-математические основания биологии". Упомяну также работы И.М.Гельфанда по применению математики к медицине и С.В.Фомина по применению математики к биологии, а также книгу С.В.Петухова "Биомеханика, бионика и симметрия".

Применению математики к экономике посвящены книга Питирима Сорокина "Социальная и культурная динамика", работа Н.Рашевского "Математическая теория человеческих отношений" и книга Филиппа Мировского "Больше тепла чем света. Экономика как социальная физика, физика как экономика природы".

В настоящее время математические методы применяются во всех науках и во всех областях человеческой деятельности.

Устойчивые явления биологии и экономики, имеющие много общего с устойчивыми явлениями механики и физики, по-видимому, могут быть определены дифференциальными уравнениями типа наших уравнений (2) и(3).

Мое 90-летие

30 августа 2007 года мне исполнилось 90 лет. К этому дню я получил много поздравлений от моих учеников, живущих в России. В вып. 11 журнала “Математическое просвещение” была опубликована статья М.П. Замаховского к моему 90-летию.