

### БИФУРКАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

С. Б. Каток

Схему изучения топологии механических систем с симметрией, изложенную в статье С. Смейла «Топология и механика» и примененную там к плоской задаче  $n$  тел, можно применить и к другим механическим задачам. В. И. Арнольд предложил рассмотреть с этой точки зрения задачу о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Малая размерность и компактность конфигурационного пространства облегчают описание бифуркационного множества и интегральных многообразий этой системы. Мы будем пользоваться обозначениями и определениями из статьи «Топология и механика» (в основном из §§ 4, 6 и 8 части I) и ссылаться на предложения из этой статьи без специальных оговорок.

Выберем в  $\mathbf{R}^3$  ортонормированный репер  $e_x, e_y, e_z$  так, что начало координат находится в точке  $O$  закрепления тела, а вектор  $e_z$  противоположен направлению силы тяжести. Пусть орты  $e_1, e_2, e_3$  направлены по осям инерции тела в точке  $O$  и образуют правую тройку;  $I_1, I_2, I_3$  — соответствующие моменты инерции тела в точке  $O$ .

Конфигурационным пространством системы служит ортогональная группа  $SO(3)$ , а фазовым пространством —  $T(SO(3)) = SO(3) \times \mathbf{R}^3$ .

Группа симметрий  $S^1$  действует на  $SO(3)$  вращениями вокруг оси  $e_z$ . Действие  $S^1$  с помощью дифференциалов переносится на  $T(SO(3))$ , причем кинетическая энергия  $K$  и потенциальная энергия  $V$  инвариантны относительно этого действия.

Итак,  $(SO(3), K, V, S^1)$  является механической системой с симметрией. Полная энергия  $E: T(SO(3)) \rightarrow \mathbf{R}$  и момент количества движения относительно оси  $e_z$   $J: T(SO(3)) \rightarrow \mathbf{R}$  являются первыми интегралами системы.

Мы опишем бифуркационное множество  $\Sigma$ , состоящее из точек  $(c, p) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , над которыми отображение  $I = E \times J: T(SO(3)) \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  не является локально-тривиальным, и найдем топологический тип интегральных многообразий  $I_{c,p} = I^{-1}(c, p)$  в случае, когда центр тяжести тела лежит на одной из осей инерции и величины  $I_1, I_2, I_3$  попарно различны. Без ограничения общности можно считать, что центр тяжести лежит на оси  $e_3$ , а также, что  $I_1 < I_2$ . Обозначим  $Q = mgl$ , где  $m$  — масса тела, а  $l$  — расстояние между центром тяжести тела и точкой  $O$ . Напомним, что эффективный потенциал  $V_p: SO(3) \rightarrow \mathbf{R}$  задается формулой  $V(x) = E(\alpha_p(x))$ , где векторное поле  $\alpha_p$  таково, что  $\alpha_p(x) \in J_x^{-1}(p)$ ,  $\alpha_p(x) \perp J_x^{-1}(0)$  а ортогональность понимается в смысле скалярного произведения, определяемого нормой  $K$ . Факторпространство конфигурационного пространства  $SO(3)$  по действию группы  $S^1$  является двумерной сферой<sup>1)</sup>  $S^2$ . Поэтому  $V_p$  индуцирует функцию  $\tilde{V}_p: S^2 \rightarrow \mathbf{R}$ .

<sup>1)</sup> Этот факт был известен еще Пуассону. Он заметил, что положение подвижного репера относительно неподвижного с точностью до вращений относительно вертикальной оси неподвижного репера можно задавать тремя вертикальными компонентами ортов

Приложение 2

ОГООБРАЗИЯ  
ЕЛА

В силу компактности  $SO(3)$  бифуркационное множество  $\Sigma$  совпадает с множеством критических точек  $\Sigma'$  отображения  $I = E \times J$ . В силу теоремы (6.5) (b) части I  $\Sigma' = \{(y, p) \mid y \in \tilde{V}_p(\Gamma)\}$ , где  $\Gamma$  — множество критических точек функции  $\tilde{V}_p$ .

**Теорема 1.** Множество  $\Sigma \subset \mathbf{R}^2$  представляет собой объединение двух парабол, задаваемых уравнениями  $y = \frac{p^2}{2I_3} \pm Q$  и четырех кривых, две из которых целиком лежат в полуплоскости  $p > 0$ , а две другие симметричны им относительно оси  $y$ . На рис. 11—16 изображена часть бифуркационного множества, лежащая в полуплоскости  $p > 0$  при всех возможных соотношениях между моментами инерции  $I_1, I_2, I_3$ . Если  $\frac{4}{3} I_2 < I_3$ , две кривые, каждая из которых состоит из двух ветвей, могут либо пересекаться, как показано на рис. 16, либо не пересекаться. В остальных случаях топологический характер бифуркационной картины определен однозначно. Функция  $\tilde{V}_p$  имеет вырожденные критические точки при значениях  $p$ , соответствующих точкам ветвления, отмеченным на рисунках. Остальные критические точки являются невырожденными, причем на рис. 11—16  $m$  означает минимум,  $M$  — максимум,  $S$  — седловую точку, а коэффициент 2 показывает, что данное значение соответствует паре критических точек.

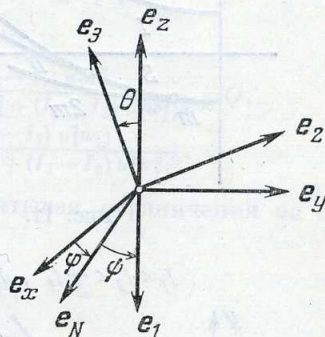


Рис. 10.

**Доказательство теоремы 1.** Введем углы Эйлера  $(\varphi, \theta, \psi)$ , как показано на рис. 10, где  $e_N$  — орт «линии углов». Подробности см. в [23], стр. 155—157. Соответствующие координаты касательного вектора  $v_x \in T_x, x \in SO(3)$  обозначим  $v_\varphi, v_\theta, v_\psi$ . Потенциальная энергия системы равна  $V(x) = Q \cos \theta$ . Кинетическая энергия равна

$$K(v_x) = k_{11}(x) v_\varphi^2 + k_{22}(x) v_\theta^2 + k_{33}(x) v_\psi^2 + 2k_{12}(x) v_\varphi v_\theta + 2k_{13}(x) v_\varphi v_\psi,$$

где

$$k_{11}(x) = \frac{I_1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \frac{I_2}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \frac{I_3}{2} \cos^2 \theta,$$

$$k_{22}(x) = \frac{I_1}{2} \cos^2 \psi + \frac{I_2}{2} \sin^2 \psi,$$

$$k_{33}(x) = \frac{I_3}{2},$$

$$k_{12}(x) = \frac{1}{2} \sin \theta \sin \psi \cos \psi (I_1 - I_2),$$

$$k_{13}(x) = \frac{I_3}{2} \cos \theta.$$

подвижной системы. Эти три компонента образуют вектор  $\gamma \in S^2$ . При помощи вектора  $\gamma$  уравнения движения тяжелого твердого тела записываются в замечательно простом виде

«уравнений Эйлера — Пуассона»  $\frac{dM}{dt} - [M, \omega] = g[\gamma, l], \quad \frac{d\gamma}{dt} = [\gamma, \omega].$

Это выражение теряет смысл при  $\theta = 0$  или  $\pi$ , но  $K$  можно очевидным образом доопределить по непрерывности. Момент количества движения

$$I_3 < I_1$$

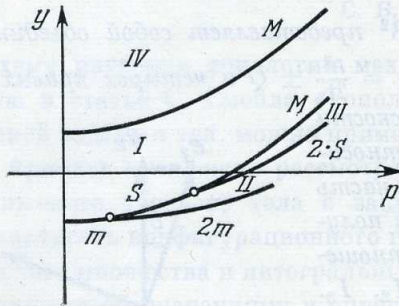


Рис. 11.

$$I_2 < I_3 < \frac{4}{3} I_1$$

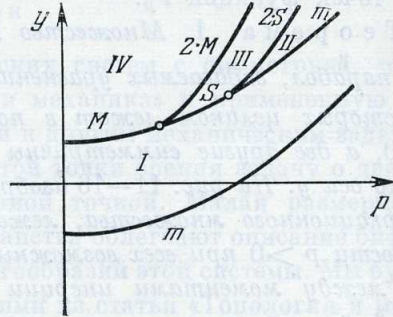


Рис. 12.

$$I_1 < I_3 < \frac{4}{3} I_1, I_3 < I_2$$

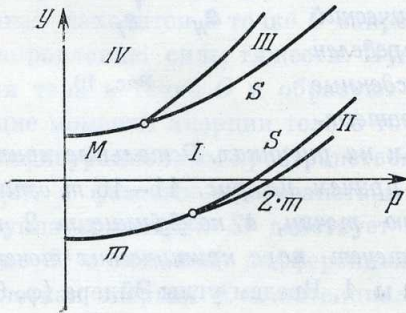


Рис. 13.

$$\frac{4}{3} I_1 < I_3, I_2 < I_3 < \frac{4}{3} I_2$$

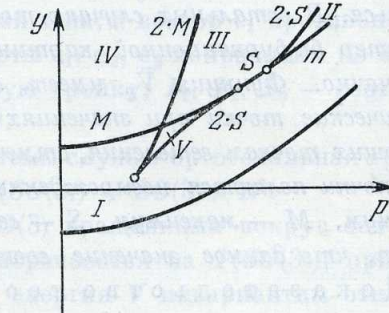


Рис. 14.

$$\frac{4}{3} I_1 < I_3 < I_2$$

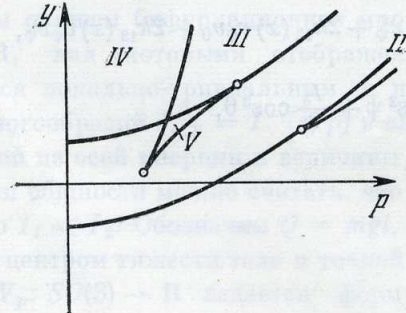


Рис. 15.

$$\frac{4}{3} I_2 < I_3$$

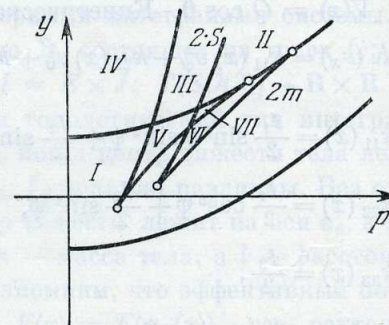


Рис. 16

относительно оси  $e_z$  равен

$$J_x(v_x) = 2k_{11}(x)v_\varphi + 2k_{12}(x)v_\theta + 2k_{13}(x)v_\psi.$$

Теперь можно вычислить координаты  $v_\varphi, v_\theta, v_\psi$  вектора  $\alpha_p(x)$ :  $v_\varphi = \frac{p}{2k_{11}(x)}$ ,  $v_\theta = v_\psi = 0$  и эффективный потенциал

$$(1) V_p(x) = Q \cos \theta + \frac{p^2}{4k_{11}(x)} = Q \cos \theta + \frac{p^2/2}{I_1 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + I_2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + I_3 \cos^2 \theta}$$

Фор...

динаты  $\theta$   
Для  
замену  
при  $|u_1$

Первые

(2)

При  
 $w_1$ , полу

(3)

т. е. ка...

лежащих

причем

критичес

сделаем

будет не

$D_{u_2} \tilde{V}_p(u_2)$

но на  $I_2$ ,

раз на дв

вдоль эт

заменой

Восп

проверит

ческими

Так

(напомни

суженной

функции

на мерид

ми, а не

На

решения

Иssl

что при

9 Успехи

Формула (1) определяет также функцию  $\tilde{V}_p$  на сфере  $S^2$ , причем координаты  $\theta$  и  $\psi$  можно считать широтой и долготой на  $S^2$ .

Для отыскания множества  $\Gamma$  критических точек функции  $\tilde{V}_p$  сделаем замену переменных  $u_1 = \cos \theta$ ,  $w_1 = \cos \psi$ . Она будет невырожденной при  $|u_1| < 1$ ,  $|w_1| < 1$ . В этих переменных

$$\tilde{V}_p(u_1, w_1) = \frac{p^2/2}{I_1 + (I_3 - I_1)u_1^2 + (I_2 - I_1)w_1^2 + (I_1 - I_2)u_1^2w_1^2} + Qu_1.$$

Первые производные  $\tilde{V}_p$  по  $u_1$  и по  $w_1$  равны

$$(2) \begin{cases} D_{u_1}\tilde{V}_p(u_1, w_1) = \frac{-p^2((I_3 - I_1)u_1 - (I_2 - I_1)u_1w_1^2)}{(I_1 + (I_3 - I_1)u_1^2 + (I_2 - I_1)w_1^2 + (I_1 - I_2)u_1^2w_1^2)^2} + Q, \\ D_{w_1}\tilde{V}_p(u_1, w_1) = \frac{-p^2((I_2 - I_1)w_1 - (I_2 - I_1)u_1^2w_1)}{(I_1 + (I_3 - I_1)u_1^2 + (I_2 - I_1)w_1^2 + (I_1 - I_2)u_1^2w_1^2)^2}. \end{cases}$$

Приравняв обе производные к нулю и учитывая ограничения на  $u_1$ ,  $w_1$ , получаем, что в критических точках  $w_1 = 0$ ,

$$(3) \quad \frac{p^2}{Q}(I_3 - I_1)u_1 = (I_1 + (I_3 - I_1)u_1^2)^2,$$

т. е. каждому  $u_1$  — решению уравнения (3) — соответствует пара точек, лежащих на двух меридианах, на которых  $w_1 = 0$ , т. е.  $\psi = \frac{\pi}{2}$  и  $\psi = -\frac{\pi}{2}$ , причем значения  $\tilde{V}_p$  в этих двух точках совпадают. Чтобы не пропустить критические точки при  $w_1 = \pm 1$ , т. е. на двух меридианах  $\psi = 0$  и  $\psi = \pi$ , сделаем другую замену переменных  $u_2 = \cos \theta$ ,  $w_2 = \sin \psi$ . Эта замена будет невырожденной при  $|u_2| < 1$ ,  $|w_2| < 1$ . Заметим, что формулы для  $D_{u_2}\tilde{V}_p(u_2, w_2)$ ,  $D_{w_2}\tilde{V}_p(u_2, w_2)$  совпадают с формулами (2), в которых  $I_1$  заменено на  $I_2$ , а  $I_2$  — на  $I_1$ . Таким образом, новые критические точки лежат как раз на двух меридианах  $w_2 = 0$ , т. е.  $\psi = 0$ ,  $\psi = \pi$ , причем их координаты  $u_2$  вдоль этих меридианов удовлетворяют уравнению, получающемуся из (3) заменой  $I_1$  на  $I_2$ .

Воспользовавшись заменой  $x = \sin \theta \sin \psi$ ,  $y = \sin \theta \cos \psi$ , нетрудно проверить, что северный полюс  $O^+$  и южный полюс  $O^-$  также будут критическими точками для  $\tilde{V}_p$ :

Так как

$$D_{u_1w_1}^2\tilde{V}_p(u_1, w_1)|_{w_1=0} = 0, \\ D_{w_1w_1}^2\tilde{V}_p(u_1, w_1)|_{w_1=0} = \frac{-p^2(I_2 - I_1)(1 - u_1^2)}{(I_1 + (I_3 - I_1)u_1^2)^2} < 0$$

(напомним, что  $I_2 > I_1$ ), то все невырожденные максимумы функции  $\tilde{V}_p$ , суженной на меридианы  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$  будут невырожденными максимумами функции  $\tilde{V}_p$  на сфере, а минимумы — седловыми точками. Аналогично, на меридианах  $\psi = 0, \pi$  невырожденные максимумы будут седловыми точками, а невырожденные минимумы — минимумами функции  $\tilde{V}_p$  на сфере.

На первой паре меридианов ( $w_1 = 0$ ) критические точки являются решениями уравнения (3).

Исследуя графики правой и левой частей этого уравнения, получаем, что при  $I_3 > I_1$  решения могут быть только положительными. При малых

$p^2$  решений не будет. При  $p^2 = p_{11}^2 = \frac{16QI_1^{3/2}}{3\sqrt{3}(I_3 - I_1)^{1/2}}$  произойдет касание в точке с абсциссой  $u_1^{(0)} = \frac{I_1^{1/2}}{\sqrt{3}(I_3 - I_1)^{1/2}}$ , а так как  $0 < u_1 < 1$ , то этот случай реализуется лишь при  $I_3 > \frac{4}{3}I_1$ . При  $p^2 > p_{11}^2$  уравнение будет иметь два решения до тех пор, пока большее решение не совпадет с 1, т. е. не уйдет в северный полюс. Это произойдет при  $p^2 = p_{12}^2 = \frac{QI_3^2}{I_3 - I_1}$ , а при  $p^2 > p_{12}^2$  уже останется только один корень.

При  $I_1 < I_3 < \frac{4}{3}I_1$  двух решений не будет ни при каком  $p$ , а при  $p^2 > p_{12}^2$  будет одно решение, выходящее при  $p^2 = p_{12}^2$  из северного полюса.

При  $I_3 < I_1$  решения могут быть только отрицательными. При  $p^2 = p_{13}^2 = \frac{QI_3^2}{I_1 - I_3}$  впервые возникнет решение  $u_1 = -1$ , соответствующее южному полюсу и при  $p^2 > p_{13}^2$  оно сохранится. Для того чтобы найти соответствующие значения  $p_{21}, p_{22}, p_{23}$  для второй пары меридианов, надо в формулах для  $p_{11}, p_{12}, p_{13}$  заменить  $I_1$  на  $I_2$ . Заметим, что  $p_{21} > p_{11}$ ,  $p_{22} > p_{12}$ ,  $p_{23} < p_{13}$  (мы считаем  $p_{ij}$   $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$  положительными числами). Мы можем теперь дать описание бифуркационного множества  $\Sigma$  на плоскости  $\mathbf{R}^2$ .

Значения  $\tilde{V}_p$  в полюсах

$$\tilde{V}_p(O^+) = \frac{p^2}{2I_3} + Q, \quad \tilde{V}_p(O^-) = \frac{p^2}{2I_3} - Q$$

определяют на плоскости  $(y, p)$  две параболы.

В силу очевидной симметрии множества  $\Sigma$  относительно оси  $y$  достаточно описать часть этого множества, лежащую в полуплоскости  $p > 0$ . Рассмотрим множество точек вида  $(y, p)$ , где  $y \in \tilde{V}_p(\Gamma_1)$ , а  $\Gamma_1$  — множество критических точек  $\tilde{V}_p$ , лежащих на меридианах  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ . В случае  $I_3 > \frac{4}{3}I_1$  это множество представляет собой кривую  $K_1$ , определенную при  $p \geq p_{11}$  и имеющую при  $p_{11} \leq p \leq p_{12}$  две ветви, касающиеся друг друга в «вершине», лежащей между двумя параболой, причем ветвь, соответствующая меньшему корню уравнения (3), идет выше ветви, соответствующей большему корню. Это следует из того, что у непрерывной функции  $\tilde{V}_p$ , ограниченной на меридиан, максимумы и минимумы чередуются, а  $O^-$  является минимумом. При  $p = p_{12}$  нижняя ветвь заканчивается на верхней параболе, а верхняя ветвь продолжается при всех  $p > p_{11}$ . Простые рассмотрения из анализа показывают, что верхняя ветвь кривой  $K_1$  пересекает верхнюю параболу в одной точке и при  $p \rightarrow \infty$  ведет себя как парабола  $\frac{p^2}{2I_1}$ , т. е. идет круче параболы, соответствующей северному полюсу. Случаю  $I_1 < I_3 < \frac{4}{3}I_1$  соответствует кривая, определенная при  $p \geq p_{12}$ , начинающаяся на верхней параболе и касающаяся ее. Случаю  $I_3 < I_1$  соответствует кривая, определенная при  $p \geq p_{13}$ , начинающаяся на нижней параболе и касающаяся ее. Аналогичные возможности возникают для критических точек, лежащих

на мер  
вершин  
нижней  
секать  
доказат  
сообра  
двумя  
не пере  
мериди  
функци  
 $p_{11}, p_{12}$   
соответ  
рассмот  
ных кр  
Пе  
кацион  
движен  
многооб  
гральн  
Т е

определ

(с,  
 $\tilde{M}_c, p$

Зде  
только,  
Т е  
тривиа

и инте

для обл  
дующей

на меридианах  $\psi = 0, \pi$  и определяющих кривую  $K_2$ . Если  $\frac{4}{3} I_2 < I_3$ , вершина кривой  $K_2$  лежит правее, чем вершина кривой  $K_1$  ( $p_{21} > p_{11}$ ) и ниже нижней ветви кривой  $K_1$ ; кроме того, верхняя ветвь кривой  $K_2$  может пересекать нижнюю ветвь кривой  $K_1$  не более, чем в одной точке. Мы опускаем доказательство этих двух фактов, которое можно получить из топологических соображений. Поэтому в этом случае кривые могут быть расположены лишь двумя способами, а именно, пересекаться (как показано на рис. 16) или не пересекаться. Учитывая постоянство знака  $D_{w,w}^2 \tilde{V}_p(u, w)$  на каждой паре меридианов, нетрудно установить, как меняется тип критических точек функции  $\tilde{V}_p$  с изменением  $p$ . Очевидно, точки ветвления, соответствующие  $p_{11}, p_{12}$  или  $p_{13}$  и аналогичным значениям для второй пары меридианов, соответствуют вырожденным критическим точкам  $\tilde{V}_p$ . Непосредственное рассмотрение вторых частных производных показывает, что других вырожденных критических точек нет. Теорема 1 доказана.

Перейдем к интегральным многообразиям. Кривые, образующие бифуркационное множество, делят плоскость энергии — момента количества движения на области, внутри которых топологический тип интегральных многообразий не меняется. Области, которым соответствуют непустые интегральные многообразия, обозначены на рис. 11—16 римскими цифрами.

Теорема 2. Дифференцируемый тип множеств

$$\tilde{M}_{c,p} = \{x \in S^2, \tilde{V}_p(x) \leq c\}$$

определяется следующей таблицей:

Таблица 1

$(c, p) \in$	I	II	III	IV	V	VI	VII
$\tilde{M}_{c,p}$	$D^2$	$D^2 \cup D^2$	$D^1 \times S^1$	$S^2$	$D_2^2$	$D^2 \cup D^2 \cup D^2$	$D^1 \times S^1 \cup D^2$

Здесь  $D_2^2$  — круг с двумя «дырками». Заметим, что случай V возникает только, если  $\frac{4}{3} I_1 < I_3$ , а случаи VI и VII, когда  $\frac{4}{3} I_2 < I_3$ .

Теорема 3. Отображение  $I = E \times J: T(SO(3)) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  является тривиальным расслоением над каждой из областей I—VII и многообразия

$$M_{c,p} = \{x \in SO(3), V_p(x) \leq c\},$$

$$E_{c,p} = \{v_x \in J^{-1}(p), E(v_x) \leq c\},$$

$$\tilde{E}_{c,p} = E_{c,p} / S^1$$

и интегральные многообразия

$$I_{c,p} = I^{-1}(c, p), \quad \tilde{I}_{c,p} = I_{c,p} / S^1$$

для областей I, III, IV, V (т. е. для случаев, когда они связаны) дается следующей таблицей:

Таблица 2

$\tilde{M}_{c,p}$	$M_{c,p}$	$\tilde{E}_{c,p}$	$E_{c,p}$	$\tilde{I}_{c,p}$	$I_{c,p}$
$D^2$	$D^2 \times S^1$	$D^4$	$D^4 \times S^1$	$S^3$	$S^3 \times S^1$
$D^1 \times S^1$	$D^1 \times T^2$	$D^3 \times S^1$	$D^3 \times T^2$	$S^2 \times S^1$	$S^2 \times T^2$
$S^2$	$SO(3) = P_3(\mathbf{R})$	$(TS^2)_0$	$J^{-1}(0)_0$	$P_3(\mathbf{R})$	$\partial(J^{-1}(0)_0)$
$D_2^2$	$D_2^2 \times S^1$	$D_2^4$	$D_2^4 \times S^1$	$S_2^3$	$S_2^3 \times S^1$

Здесь  $D_2^4$  — шар  $D^4$  с двумя ручками индекса 1,  $S_2^3 = \partial D_2^4$  — «трехмерный крендель»,  $E_0(\partial E_0)$  — расслоение единичных шаров (сфер), ассоциированное с римановым векторным расслоением  $E$ .

**З а м е ч а н и е.** Когда  $\tilde{M}_{c,p}$  несвязно, то интегральное многообразие представляет собой объединение интегральных многообразий, соответствующих связным компонентам  $\tilde{M}_{c,p}$ .

Мы не будем приводить подробные доказательства теорем 2 и 3, а ограничимся несколькими замечаниями. Полные доказательства можно с их помощью восстановить без труда. Многообразия  $\tilde{M}_{c,p}$  и  $\tilde{E}_{c,p}$  найдены с помощью элементарной теории Морса с использованием предложения 8.5 (b) из части I.  $M_{c,p}$  является  $S^1$  расслоением над  $\tilde{M}_{c,p}$ , которое во всех случаях, кроме  $\tilde{M}_{c,p} = S^2$ , есть сужение на  $\tilde{M}_{c,p}$  некоторого  $S^1$  расслоения над  $D^2$  (так как  $\tilde{M}_{c,p} \subset D^2 \subset S^2$ ) и поэтому в этих случаях расслоение тривиально.  $E_{c,p}$  получается из  $\mathbf{R}^2$  расслоения  $J^{-1}(0)$  над  $SO(3)$  с помощью стандартной конструкции, описанной в предложении (8.3) части I. Наконец,  $\tilde{I}_{c,p} = \partial \tilde{E}_{c,p}$  и  $I_{c,p} = \partial E_{c,p}$ .

Наши рассуждения с несущественными усложнениями можно перенести на случай, когда центр тяжести лежит в плоскости двух осей инерции. Общий случай, по-видимому, более сложен. В этой связи полезен классический результат Штауде о «перманентных осях вращения» [24], который мы можем интерпретировать как нахождение геометрического места критических точек функций  $\tilde{V}_p$  при всех  $p$ .

Недавно появилась статья А. Jacob «Invariant manifolds in motion of a rigid body about a fixed point» (Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, tome XVI, № 10, 1971), в которой, в частности, найдено бифуркационное множество отображения  $I$  и интегральные многообразия в случае Ковалевской ( $2I_1 = I_2 = I_3$ ), который соответствует предельной ситуации, промежуточной между случаями, изображенными на рис. 14 и рис. 15, когда кривая  $K_2$  исчезает ( $p_{22}$  или  $p_{23} \rightarrow \infty$ ).

Я очень благодарна В. И. Арнольду за ценные замечания.

- [1] R.
- [2] R.
- [3] V. I. nite  
Gren
- [4] V. I. Her
- [5] Дж
- [6] R.
- [7] E. C. русс  
1944
- [8] Э. I. ура
- [9] С. С. 1963
- [10] Г. I.
- [11] R. Aca
- [12] W. 316
- [13] L. Iey.
- [14] W. Am
- [15] K.
- [16] R.
- [17] J. poir
- [18] S. S. Ал
- [19] D. Add
- [20] A.
- [21] A.
- [22] F. of M
- [23]<sup>1)</sup> V.
- [24]<sup>1)</sup> O. Kö

<sup>1)</sup> C

Таблица 2

	$I_{c, p}$
	$S^3 \times S^1$
	$S^2 \times T^2$
	$\partial(J^{-1}(0)_0)$
	$S^2_2 \times S^1$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. A b r a h a m, Foundations of Mechanics, New York, 1967.
- [2] R. A b r a h a m, J. R o b b i n, Transversal Mappings and Flows, New York, 1967.
- [3] V. I. A r n o l d, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique de fluides parfaits, Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble **16** (1966), 349—361.
- [4] V. I. A r n o l d, A. A v e z, Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Paris, Hermann, 1967.
- [5] Дж. Д. Б и р к г о ф. Динамические системы, М.—Л., Гостехиздат, 1941.
- [6] R. B o t t, Non-degenerate critical manifolds, Ann. of Math. **60** (1954), 248—261.
- [7] E. C a r t a n, Leçons sur les invariants intégraux, Paris, 1958 (первое издание 1921; русский перевод: Э. К а р т а н, Интегральные инварианты, М.—Л., Гостехиздат, 1941).
- [8] Э. К о д д и н г т о н, Н. Л е в и н с о н, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1958.
- [9] C. G o d b i l l i o n, Géométrie différentielle et mécanique analytique, Paris, Hermann, 1969.
- [10] Г. Г о л д с т е й н, Классическая механика, М., Гостехиздат, 1957.
- [11] R. Н е г м а н н, Differential Geometry and the calculus of variations, New York, Academic Press, 1968.
- [12] W. K a p l a n, Topology of the two-body problem, Amer. Math. Monthly **49** (1942), 316—323.
- [13] L. L o o m i s, S. S t e r n b e r g, Advanced Calculus, Reading, Mass, Addison-Wesley, 1968.
- [14] W. L o u d, Periodic solutions of perturbed second-order autonomous equations, Mem. Amer. Math. Soc. (publisher) and Providence, R. I. **47** (1964).
- [15] К. Н о м и д з у, Группы Ли и дифференциальная геометрия, М., ИЛ, 1960.
- [16] R. P a l a i s, Morse Theory on Hilbert manifolds, Topology **2** (1963), 299—340.
- [17] J. S c h w a r t z, Generalizing the Lusternic — Schnirelmann — theory of critical points, Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), 307—315.
- [18] S. S m a l e, Morse Theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem, Ann. of Math. **80** (1964), 382—396.
- [19] D. S t r u i k, Lectures on Classical Differential Geometry, Cambridge, Mass, Addison — Wesley, 1950.
- [20] A. W a s s e r m a n, Equivariant differential topology, Topology **8** (1969), 127—150.
- [21] А. У и н т н е р, Аналитические основы небесной механики, М., «Наука», 1967.
- [22] F. R. M o u l t o n, The straight line solutions of the problem of  $N$  bodies, Annals of Math **12** (1910) 1—17.
- [23]<sup>1)</sup> В. И. А р н о л д, Лекции по классической механике, М., МГУ, 1968.
- [24]<sup>1)</sup> O. S t a u d e, Über permanente Rotations axen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, J. f. Reine u Angew. Math. **113**, (1894) 318—334.

1) Ссылки [23] и [24] относятся к приложению 2.